Soru 7) Parametrik olarak

$$x(t)=t^3,\quad y(t)=(1-t^2)^{3/2},\quad -1\le t\le 1$$

ile verilen eğrinin uzunluğunu bulunuz. (10 P)

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=3t^2\\ \dot{y}(t)&=-3t(1-t^2)^{1/2}\end{aligned}\right\}\quad \sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}=\sqrt{9t^4+9t^2(1-t^2)}=3|t|$$

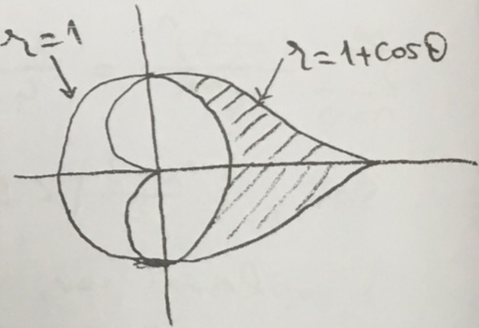
$$S=\int_{-1}^{1}\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}\,dt=\int_{-1}^{1}3|t|\,dt=6\int_0^1 t\,dt$$

$$=3 \text{ birim}$$

Soru 8) $r=1$ çemberinin dışında ve $r=1+\cos\theta$ kardiyoidinin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz. (15P)

$$1=1+\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=0$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$$



$$\frac{A}{2}=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left[(1+\cos\theta)^2-1^2\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\sin\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}=1+\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow\quad A=2+\frac{\pi}{4}\ br^2$$

II. yol $\quad A=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}\left[(1+\cos\theta)^2-1^2\right]d\theta$

	YTÜ - Mühendislik Fakülteleri *I. Ara Sınav* Soru ve Cevap Kağıdı				NOT TABLOSU							
				1	2	3	4	5	6	7	8	T
Adı Soyadı												
Öğrenci Numarası		Grup No										
Bölümü				Sınav Tarihi	22.03.2019							
Dersin Adı	MAT1071 MATEMATİK I	Sınav Süresi	100 dk	Sınav Yeri								
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı		İmza										

YÖK nün 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan *"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"* fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

Soru 1) $\left\{\dfrac{n^{5/2}}{2n^2+1}\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\geq 1}$ di~~zi~~nin limitini bulunuz. (12 P)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{5/2}}{2n^2+1}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\cdot\sqrt{n}}{2n^2+1}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2n^2+1}\cdot\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\ //$$

Soru 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ serisinin toplamını bulunuz. (13 P)

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\dots+\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1\ //$$

Soru 5) $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n$ serisini yakınsak yapan x değer(ler)ini bulunuz. (12 P)

$a_n = n!$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

old. verilen kuvvet serisi, sadece $x=1$ için yakınsar.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n!(x-1)^n . \right)$$

Soru 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{4^{n+1}}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve toplamını (temsil ettiği fonksiyonu) bulunuz. (13 P)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+3}{4} \right)^n$$

Seri, $\left| \frac{x+3}{4} \right| < 1$ ise, yani $-7 < x < 1$ ise yakınsak.

Toplamı ise, bir Geometrik Seri olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+3}{4}} = \frac{1}{1-x} .$$

Soru 3) $\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \ln\left(1-n^{-1}\right)$ serisinin karakterini (yakınsaklığını veya ıraksaklığını) tespit ediniz. (12 P)

$a_n = n \cdot \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$; $\forall n \geq 2$ için $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

$$= \ln e^{-1} = -1 \neq 0$$

old. verilen seri, Iraksaklık Testi gereği ıraksak olmalıdır.

Soru 4) Eğer $\{a_n\}$ dizisi, ardışık olarak

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot a_n, \quad n \geq 1$$

ile tanımlanmışsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini tespit ediniz. (13 P)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

old. verilen seri, Bölüm Testi gereği yakınsak olmalıdır.