Soru 7) Bir f fonksiyonu, $f(0,0)=0$ ve $(x,y)\neq(0,0)$ için $f(x,y)=\dfrac{e^{x^3+y^2}-1}{x^2+y^2}$ ile tanımlanıyor. Eğer mevcut ise, $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ sayılarını bulunuz. (12 P)

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{h^3}-1}{h^3}$$

$$\overset{L}{=}\lim_{h\to 0}\frac{3h^2e^{h^3}}{3h^2}=1\ //$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{h^2}-1}{h^3}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{h^2}-1}{h^2}\cdot\frac{1}{h}\right)\ \text{yok!}$$

Soru 8) Kabul edelim ki z, x ve y nin diferansiyellenebilen bir fonksiyonu olarak

$$y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

deklemini sağlamaktadır. Bu denklemin **kutupsal koordinatlar**da alacağı şekli bulunuz. (13 P)

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta \Rightarrow z=z(x,y)=f(\rho,\theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-\rho\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot(\rho\cos\theta)$$

$$=-y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=0\ //$$

YTÜ - Mühendislik Fakülteleri

II. Ara Sınav Soru ve Cevap Kağıdı

Adı Soyadı			
Öğrenci Numarası		Grup No	
Bölümü			
Dersin Adı	MAT1072 MATEMATİK II		
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı			

NOT TABLOSU								
1	2	3	4	5	6	7	8	T

Sınav Tarihi	27.04.2019		
Sınav Süresi	90 dk	Sınav Yeri	
İmza			

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan *"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"* fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

Soru 1) Eğer $n \geq 0$, bir tamsayı ise, $\sum_{k=n}^{\infty} 3^{n-k}$ toplamını bulunuz. (13 P)

I. YOL

$$\sum_{k=n}^{\infty} 3^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} 3^{-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1-3^{-n}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} 3^{1-n}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} 3^{n-k} = \frac{1}{2} 3^{n} \cdot 3^{1-n} = \frac{3}{2} \;//$$

II. YOL $m=k-n$ al.

$$\sum_{k=n}^{\infty} 3^{n-k} = \sum_{m=0}^{\infty} 3^{-m} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \;//$$

Soru 2) $\lim_{x\to 0} \int_{x}^{2x} \frac{e^{2t}-1}{t^2}\,dt$ limitini hesaplayınız. (12 P)

$$e^{u} = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \cdots$$

$$e^{2t} - 1 = 1 + 2t + 2t^2 + \frac{4t^3}{3} + \cdots - 1$$

$$L = \lim_{x\to 0} \int_{x}^{2x} \frac{e^{2t}-1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to 0} \int_{x}^{2x} \left(\frac{2}{t} + 2 + \frac{4}{3}t + \cdots\right) dt$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[2\ln|t| + 2t + \frac{2}{3}t^2 + \cdots\right]_{x}^{2x} = 2\ln 2 \;//$$

Soru 3) Aşağıda verilen eğrinin, t nin artışı yönündeki s yay uzunluk fonksiyonunu bulunuz. (12P)

$$\vec{r}(t)=\frac{1}{2}(t-1)^2\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-2t)\vec{j}+\vec{k},\ \ t\geq 0.$$

$$\vec{r}\,'(t)=(t-1)\vec{i}+\sqrt{3}(t-1)\vec{j} \Rightarrow \|\vec{r}\,'(t)\|=\sqrt{(t-1)^2+3(t-1)^2}=2|t-1|$$

$$s(t)=\int_0^t \|\vec{r}\,'(u)\|\,du=\int_0^t 2|u-1|\,du$$

1°) $0\leq t\leq 1$ için $s(t)=\int_0^t 2(1-u)\,du=-(1-u)^2\Big|_0^t=1-(1-t)^2$

2°) $t>1$ için $s(t)=\int_0^1 2(1-u)\,du+\int_1^t 2(u-1)\,du$

$$=-(1-u)^2\Big|_0^1+(u-1)^2\Big|_1^t=(t-1)^2+1.$$

Soru 4) $f(x,y)=\arcsin\dfrac{1-x^2-y^2}{3}+\ln(y-x^2)$ ile verilen f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz. (Şekil çizilecek) (13P)

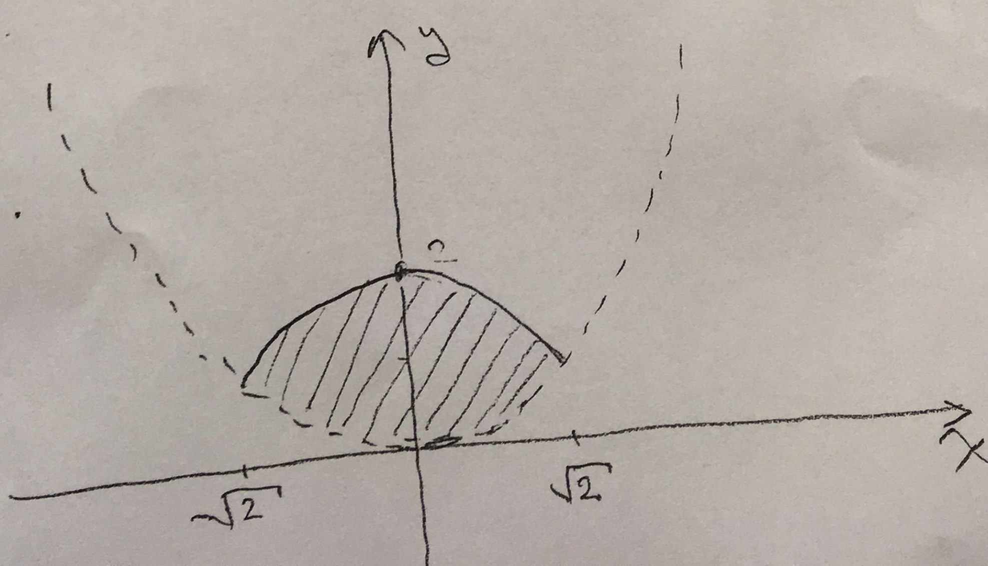
$f_1(x,y)=\arcsin\dfrac{1-x^2-y^2}{3}$; $\forall\theta$ için $-1\leq\sin\theta\leq 1$

$$-1\leq\frac{1-x^2-y^2}{3}\leq 1$$

1°) $0\leq x^2+y^2\leq 4$

$f_2(x,y)=\ln(y-x^2)$; 2°) $y>x^2$

$$D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leq x^2+y^2\leq 4\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y>x^2\}$$



Soru 5) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-\sqrt{xy}}{2x^2-xy-y^2}$ limitini hesaplayınız. (12 P)

$$L = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(2x+y)(x-y)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(2x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \qquad (x \neq y)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sqrt{x}}{(2x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$= \frac{1}{6} //$$

Soru 6) $(x,y)\neq(0,0)$ için $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ ile verilen f fonksiyonunu (0,0) noktasında sürekli hale getiriniz. (13 P)

$\forall (x,y)$ için $x^4+y^4 \leq x^4+2x^2y^2+y^4 = (x^2+y^2)^2 \Rightarrow$

$\forall (x,y)\neq(0,0)$ için $0 \leq \dfrac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leq \dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow$ Sıkıştırma Kuralı gereği

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$$

olup,

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

fonksiyonu süreklidir.