| YTÜ – Fen-Edebiyat Fakültesi *Final* Soru ve Cevap Kağıdı | | | NOT TABLOSU | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | T |
| Adı Soyadı | CEVAP ANAHTARI | | | | | | | | | | |
| Öğrenci Numarası | | Grup No | | | | | | | | | |
| Bölümü | | | Sınav Tarihi | 20.05.2019 | | | | | | | |
| Dersin Adı | MAT1072 MATEMATİK II | Sınav Süresi | 90 dk | Sınıf | | | | | | | |
| Öğretim Üyesi | | | İmza | | | | | | | | |

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan *"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"* fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

**Soru 1)** Denklemleri $x+y=1$ ve $y+z=2$ olan düzlemlerin arakesit doğrusu ile $x=1-t$, $y=2+t$, $z=1+2t$ doğrusu arasındaki **açıyı** bulunuz. (11 P)

$x=t$ seç $y=1-t$, $z=2-(1-t)=1+t$

$$\cos\theta = \frac{\langle 1,-1,1\rangle\cdot\langle -1,1,2\rangle}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \frac{-1-1+2}{\sqrt{18}} = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \,//$$



**Soru 2)** $x^2+2y^2+z^2=15$ ve $z^2=2x^2+y^2$ yüzeyleri bir çember boyunca kesişir. $P(2,1,3)$ noktasında bu çembere teğet olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz. (14 P)

$F=x^2+2y^2+z^2-15$, $\nabla F=\langle 2x,4y,2z\rangle$, $\nabla F(P)=\langle 4,4,6\rangle$

$G=2x^2+y^2-z^2$, $\nabla G=\langle 4x,2y,-2z\rangle$, $\nabla G(P)=\langle 8,2,-6\rangle$

$$\nabla F(P)\times\nabla G(P) = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & -6 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 4 & 4 \\ 8 & 2 \end{matrix} = \langle -24-12, 48+24, 8-32\rangle = \langle -36, 72, -24\rangle$$

$$\vec{V} = \frac{1}{12}\nabla F(P)\times\nabla G(P) = \langle -3,6,-2\rangle$$

$x=2-3t$, $y=1+6t$, $z=3-2t$

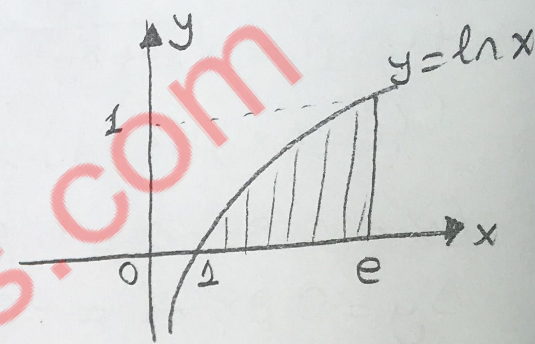
Not: $\vec{V}$ için 12 sayısına bölmek gerekmez!

Başarılar…

**Soru 7)** İki katlı integral kullanarak, $y = \ln x$ eğrisinin $x = e$ ve $y = 0$ doğruları ile sınırladığı bölgenin alanını bulunuz. (13 P)

$$A = \int_0^1 \int_{e^y}^{e} dx\,dy = \int_0^1 (e - e^y)\,dy$$

$$= \left[e.y - e^y\right]\Big|_0^1 = 1\ br^2$$



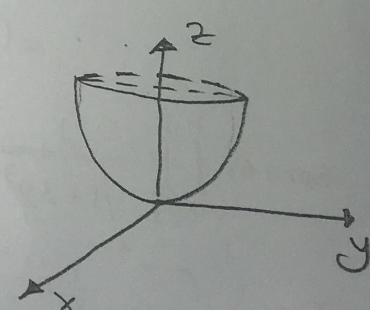

II.
$$A = \int_1^e \int_0^{\ln x} dy\,dx = \int_1^e \ln x\,dx \quad \left( \begin{array}{c|c} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = x \end{array} \right)$$

$$= x.\ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = x.(\ln x - 1)\Big|_1^e = 1\ br^2$$



**Soru 8)** İki katlı integral kullanarak, $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin içinde ve $z = 1$ düzleminin altında bulunan cismin hacmini bulunuz.(12 P)

$$\left. \begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \left\} \begin{array}{l} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array} \right.$$




$$V = \iint_\Omega \left[f_2(x,y) - f_1(x,y)\right] dA$$

I.
$$= \iint_\Omega (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ br^3$$

$\sqrt{1-x^2}$

**Soru 3)** Eğer $f(x,y) = x \cdot \ln(x^2+y^2)$ ise, $f$ nin yerel ekstremum değerlerini bulunuz. (15 P)

$f_x = \ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2}$, $\quad f_y = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

$f_y = 0 \Rightarrow y=0$ veya $x=0$

$y=0$ ve $f_x = 0 \Rightarrow \ln x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x = \pm e^{-1}$

$x=0$ ve $f_x = 0 \Rightarrow \ln y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$

Kritik Noktalar: $P_{1,2}(\pm e^{-1}, 0)$, $Q_{1,2}(0, \pm 1)$

$$f_{xx} = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4x(x^2+y^2) - 4x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{2x(x^2+y^2) - 4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Delta_{P_{1,2}} = \frac{\pm 2e^{-1} \cdot e^{-2}}{e^{-4}} \cdot \frac{\pm 2e^{-1} \cdot e^{-2}}{e^{-4}} = 4e^2$$ ve $f_{xx}(P_1) = 2e > 0$, $f_{xx}(P_2) = -2e < 0$

old. $f(P_1) = -2e^{-1}$ MİN.

$f(P_2) = 2e^{-1}$ MAKS.

$\Delta_{Q_{1,2}} = -2 < 0$ old.

$Q_1$ ve $Q_2$, birer semer noktası

**Soru 4)** Bir $F$ fonksiyonunun $P(1,2,2)$ noktasında, $\vec{v_1} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ yönündeki türevi 1 ve $\vec{v_2} = \vec{j} + \vec{k}$ yönündeki türevi $\sqrt{2}$ olsun. $F$ nin $-\vec{i}$ yönündeki türevini bulunuz. (10 P)

$\vec{U_1} = \vec{V_1} / \|\vec{V_1}\| = \frac{1}{3}\langle 1,2,2\rangle$ ; $\vec{U_2} = \vec{V_2} / \|\vec{V_2}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0,1,1\rangle$

$D_{\vec{U_1}} F(P) = \nabla F \cdot \vec{U_1} = \langle F_x, F_y, F_z\rangle \cdot \frac{1}{3}\langle 1,2,2\rangle \Rightarrow F_x + 2(F_y+F_z) = 3$

$D_{\vec{U_2}} F(P) = \nabla F \cdot \vec{U_2} = \langle F_x, F_y, F_z\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0,1,1\rangle \Rightarrow F_y + F_z = 2$

$\Rightarrow F_x = -1$

$D_{-\vec{i}} F(P) = -D_{\vec{i}} F(P) = -F_x = 1$

**Soru 5)** Diferansiyel yaklaşımı kullanarak, $\sqrt{(2{,}08)^3 + 8\,(0{,}98)^4}$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız. (13 P)

$f(x,y) = \sqrt{x^3+8y^4}$ $\quad a=2,\ b=1 \quad f(2,1)=\sqrt{2^3+8(1)^4}=4$

$f(a+\Delta x, b+\Delta y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)\cdot\Delta x + f_y(a,b)\cdot\Delta y$

$\Delta x = 2.08 - 2 = 0.08$

$\Delta y = 0.98 - 1 = -0.02$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+8y^4}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{16y^3}{\sqrt{x^3+8y^4}}$

$f_x(2,1) = \frac{3}{2}, \qquad f_y(2,1) = 4, \quad f(2,1) = 4$

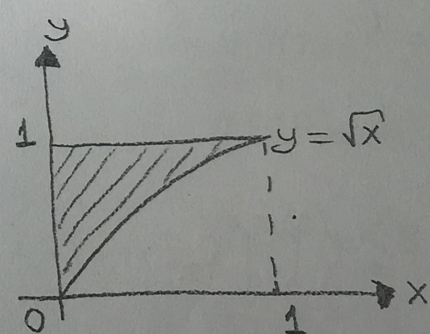
$\sqrt{(2.08)^3+8(0.98)^4} = f(2.08, 0.98)$

$\approx f(2,1) + f_x(2,1).(0.08) + f_y(2,1).(-0.02)$

$= 4 + \frac{3}{2}.(0.08) + 4(-0.02) = 4{,}04$ //



**Soru 6)** $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{1}{\sqrt{1+3y^3}}\, dydx$ integralini hesaplayınız. (12 P)




$I = \int_0^1 \left( \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{dy}{\sqrt{1+3y^3}} \right) dx = \int_0^1 \left( \left[ \int_0^{y^2} dx \right] \frac{dy}{\sqrt{1+3y^3}} \right)$

$= \int_0^1 \frac{y^2\, dy}{\sqrt{1+3y^3}} \qquad \begin{pmatrix} u = 1+3y^3 \\ du = 9y^2\, dy \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{9} \int_1^4 u^{-1/2}\, du = \frac{2}{9} \sqrt{u} \Big|_1^4 = \frac{2}{9}$ //