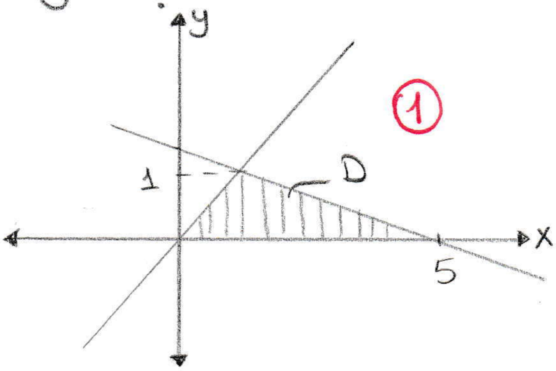
Soru 1: $\displaystyle\int_0^1 \int_{2y}^{5-3y} \frac{x-2y}{(3y+x)^2} \cdot \cos(x+3y)\, dx\,dy = ?$



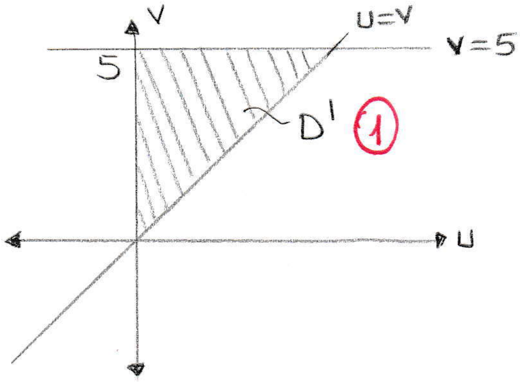
1

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{ll} y=1 & x=5-3y \\ y=0 & x=2y \end{array}\right] D \quad 1$$

$$\left.\begin{array}{l} u=x-2y \\ v=3y+x \end{array}\right] \quad 1$$

D	D'
$x+3y=5$	$v=5$ 1
$x-2y=0$	$u=0$ 1
$y=0$	$u=v$ 1



1

$$J(u,v) = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5} \quad 2$$

$$dx\,dy = \frac{1}{5}\, du\,dv \quad 1$$

$$I = \iint_{D'} \frac{1}{5} \frac{u}{v^2} \cdot \cos v \, du\,dv = \frac{1}{5} \int_{v=0}^{5} \int_{0}^{v} u \cdot \frac{\cos v}{v^2}\, du\,dv$$

1 1 2 1 1

$$= \frac{1}{5} \int_0^5 \left(\frac{u^2}{2} \cdot \frac{\cos v}{v^2} \right) \Big|_0^v dv$$

$$= \frac{1}{10} \int_0^5 \cos v \, dv \quad 2$$

$$= \frac{1}{10} \sin v \Big|_0^5$$

$$= \frac{1}{10} \sin 5 \quad 2$$

//

Soru 2:

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4y(2x^3-xy^2)}{4x^2+3y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

fonksiyonu için $F_{xy}(0,0)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm: $(x,y)\neq(0,0)$ için,

1.yol

$$F_x(x,y)=\frac{(24x^2y-4y^3)(4x^2+3y^2)-8x(8x^3y-4xy^3)}{(4x^2+3y^2)^2} \quad 1$$

$$F_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{F(0+h,0)-F(0,0)}{h} \; 2 \; =\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{4h^2}-0}{h} \; 1 \; =\lim_{h\to0}\frac{0}{4h^3}=0 \; 1$$

$$F_{xy}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{F_x(0,0+h)-F_x(0,0)}{h} \; 4 \; =\lim_{h\to0}\frac{\frac{-12h^5}{9h^4}-0}{h} \; 4 \; =\lim_{h\to0}\frac{-12h^5}{9h^5}=\frac{-4}{3} \; 2$$

2.yol

$$F_x(0,y)=\lim_{h\to0}\frac{F(0+h,y)-F(0,y)}{h} \; 4 \qquad F(0,y)=0 \; 1$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{4y(2h^3-hy^2)}{4h^2+3y^2}-0}{h} \; 4 \; =\lim_{h\to0}\frac{4y\cancel{h}(2h^2-y^2)}{\cancel{h}(4h^2+3y^2)}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{4y(2h^2-y^2)}{4h^2+3y^2}=\frac{-4y^3}{3y^2}=-\frac{4}{3}y \; 2$$

$$F_{xy}(0,y)=-\frac{4}{3} \; 2 \quad\Rightarrow\quad F_{xy}(0,0)=-\frac{4}{3} \; 2$$

Soru3: $f(x,y)=x^4-4xy-7x^2+4x+4y^2-8y+5$ fonksiyonunun tüm kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

Çözüm:

$f_x=4x^3-4y-14x+4=0$ (1) $\Rightarrow 2x^3-2y-7x+2=0$

$f_y=-4x+8y-8=0$ (1) $\Rightarrow -x+2y-2=0$

$2x^3-8x+\underbrace{x-2y+2}_{0}=0$

$f_{xx}=12x^2-14=A$ (1)

$f_{xy}=-4=B$ (1)

$f_{yy}=8=C$ (1)

$x(x^2-4)=0$ (1)

$x=0 \Rightarrow y=1$ $P(0,1)$ (1)

$x=2 \Rightarrow y=2$ $Q(2,2)$ (1)

$x=-2 \Rightarrow y=0$ $R(-2,0)$ (1)

	$A=12x^2-14$	$B=-4$	$C=8$	B^2-AC
$P(0,1)$	-14	-4	8	$\Delta=16+8.14=128>0$ (1)
$Q(2,2)$	34	-4	8	$\Delta=16-8.34=-256<0$, $A=34>0$ (1)
$R(-2,0)$	34	-4	8	$\Delta=16-8.34=-256<0$, $A=34>0$ (1)

$P(0,1)\rightarrow$ Eyer noktası (1)

$Q(2,2)\rightarrow$ Yerel minimum noktası (1)

$R(-2,0)\rightarrow$ Yerel minimum noktası (1)

Soru 4: Üç arkadaş P noktasında türevlenebilen bir $f(x,y,z)$ fonksiyonu ile ilgili bir problem üzerinde çalışıyorlar. Bu üç kişi yaptıkları hesaplamaları tartışırlarken :

I. Kişi : " $f(x,y,z)=c$ yüzeyinin P noktasındaki teğet düzlemini $2x-y-2z=3$ buldum." diyor.

II. Kişi : " f nin P noktasındaki yönlü türevinin alabileceği maksimum değerini 7 buldum." diyor.

III. Kişi : " f nin P noktasındaki $\vec{u}=2\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}$ vektörü yönündeki türevini 16 buldum." diyor.

Bu kişilerin konuşmalarını duyan ve f fonksiyonunu bilmeyen dördüncü bir kişi : "**üç arkadaştan en az birinin hesaplamasının yanlış olduğunu**" düşünüyor. Dördüncü kişinin bu düşüncesinin sebebini (yapacağınız işlemler ile) açıklayınız / ispatlayınız.

Çözüm: Farzedelim ki, üç kişinin de hesaplamaları doğru olsun.

1. kişiden ; $2x-y-2z=3 \Rightarrow \vec{n}=\langle 2,-1,-2\rangle$ ⊛ 1

$\vec{n} \parallel \nabla f|_P \Rightarrow \nabla f|_P = \langle 2k,-k,-2k\rangle$ 3 olmalıdır.

2. kişiden ; $|\nabla f|_P| = 7$ ⊛ 1 olmalıdır.

3. kişiden ; $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\langle \frac{2}{7},\frac{-6}{7},\frac{-3}{7}\rangle$ $\qquad \nabla f|_P \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = 16$ ⊛ 1 olmalıdır.

1. ve 2. den : $4k^2+k^2+4k^2 = 7^2$ 2 $\Rightarrow 9k^2 = 76 \Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$ 2

1. ve 3. den: $\nabla f|_P \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \langle 2k,-k,-2k\rangle \cdot \langle \frac{2}{7},-\frac{6}{7},\frac{-3}{7}\rangle = \frac{4k+6k+6k}{7}$ 2 $=16 \Rightarrow k=7$ 1 $\neq$

k değerleri birbirinden farklı çıktı. Çelişki !

Hepsi birden doğru olamaz. En az birinin hesaplaması yanlıştır. 2

Dikkat! ⊛ eşitliklerini doğru yazana fakat $\nabla f|_P = \vec{n} = \langle 2,-1,-2\rangle$ alarak işlem yapana toplam (1+1+1) 3 puan verilecektir.

Soru 5:

a) $f(u,v)$ fonksiyonu $f(6,-2)=2020$, $f_u(6,-2)=2$, $f_v(6,-2)=3$ eşitliklerini sağlayan bir fonksiyon olsun.
$g(x,y,z)=f(3yz+x^2,\ 2x+2y^2-z^2)$ olmak üzere $g(x,y,z)=2020$ yüzeyinin $(0,1,2)$ noktasındaki **D teğet düzlemini** bulunuz.

b) $\vec{r}(t)=\langle t^2+1,\ 2t+7,\ 4t-t^2\rangle$, $-\infty<t<\infty$ eğrisinin **(a) şıkkında bulduğunuz D düzlemine** paralel olan teğet doğrusunu bulunuz.

Çözüm: a)
$$\left.\begin{array}{l} 3yz+x^2=u \ (1) \\ 2x+2y^2-z^2=v \ (1) \end{array}\right] \quad f(6,-2)=2020=g(0,1,2)$$

$g(x,y,z)=f(u,v)$

$$g_x=f_u\cdot u_x+f_v\cdot v_x \overset{(1)}{=} f_u\cdot \overset{(1)}{2x}+f_v\cdot \overset{(1)}{2} \Rightarrow g_x(0,1,2)=2.2.0+3.2=6 \ (1)$$

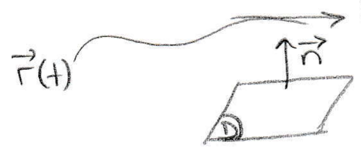
$$g_y=f_u\cdot u_y+f_v\cdot v_y \overset{(1)}{=} f_u\cdot \overset{(1)}{3z}+f_v\cdot \overset{(1)}{4y} \Rightarrow g_y(0,1,2)=2.3.2+3.4.1=24 \ (1)$$

$$g_z=f_u\cdot u_z+f_v\cdot v_z \overset{(1)}{=} f_u\cdot \overset{(1)}{3y}+f_v\cdot \overset{(1)}{(-2z)} \Rightarrow g_z(0,1,2)=2.3.1-3.2.2=-6 \ (1)$$

$$\vec{n}=\nabla g(0,1,2)=\langle 6,24,-6\rangle \ (2)$$

$$D:\quad g_x(0,1,2)(x-0)+g_y(0,1,2)(y-1)+g_z(0,1,2)(z-2)=0 \ (2)$$
$$6x+24(y-1)-6(z-2)=0 \ // \ (2)$$

b) $\vec{r}(t)=\langle t^2+1,\ 2t+7,\ 4t-t^2\rangle$



$\vec{n}\perp\vec{r}\,'(t)$ olmalı $\Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{r}\,'(t)=0$ (3)

$\vec{r}\,'(t)=\langle 2t,\ 2,\ 4-2t\rangle$ (2)

$$\vec{n}\cdot\vec{r}\,'(t)=\langle 6,24,-6\rangle\cdot\langle 2t,2,4-2t\rangle$$
$$=12t+48-24+12t=0 \ (1)$$
$$\Rightarrow 24t=-24 \Rightarrow \underline{t=-1} \ (2)$$

$\vec{r}(-1)=\langle 2,5,-5\rangle$ (2)

$\vec{r}\,'(-1)=\langle -2,2,6\rangle$ (2)

Teğet doğrusu:
$$\begin{cases} x=2-2t & (1) \\ y=5+2t & (1) \\ z=-5+6t & (1) \end{cases}$$
//