 MATRİSLER

m tane satır, n tane sütun ile oluşturulan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki tabloya matris denir. Matrisler kısaca $A=[a_{ij}]$ şeklinde de gösterilirler.

$i \to$ Satır numarasını
$j \to$ Sütun numarasını
göstermektedir.

a_{ij}'lere matrisin elemanları denir. m satır ve n sütundan oluşan matrise mxn boyutlu veya mxn mertebeli matris denir.

$$\begin{pmatrix} i=1,---,m \\ j=1,---,n \end{pmatrix}$$

Kare Matris:

m=n ise matrise n. mertebeden bir kare matris denir. Kare matrisin $a_{11}, a_{22}, ---, a_{nn}$ elemanlarına matrisin köşegen elemanları denir. Bir kare matriste bu köşegen elemanların toplamına matrisin izi denir.

$$İz(A) = a_{11}+a_{22}+---+a_{nn}$$

Satır Matris:

1xn mertebeli matrise satır matris denir. A matrisi bir satır matris ise $A=[a_{11} \ a_{12} \ --- \ a_{1n}]$ şeklinde gösterilir.

Sütun Matris:

mx1 mertebeli matrise sütun matris denir. A matrisi bir sütun matris ise $A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ şeklinde gösterilir.

İki Matrisin Eşitliği:

$A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ matrisleri aynı mertebeden ve karşılıklı elemanları birbirine eşit ise A ve B matrislerine eşit matrisler denir. A=B şeklinde gösterilir.

Sıfır Matris:

Bütün elemanları 0 olan matrise 0 matris denir.

$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A=0$ şeklinde gösterebiliriz.

Matrislerin Toplamı:

$m \times n$ mertebeli $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ matrislerinin toplamı, aynı mertebeden ve c_{ij} elemanı, bu matrislerin karşılıklı a_{ij} ve b_{ij} elemanlarının toplamı olan bir $C=[c_{ij}]$ matrisi olarak tanımlanır.

$$A+B=C=[c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$$

İki Matrisin Farkı:

$m \times n$ mertebeli $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ matrislerinin farkı, aynı mertebeden ve c_{ij} elemanları, a_{ij} ve b_{ij}'nin farkı olan ($c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$) bir $C=[c_{ij}]$ matrisi olarak tanımlanır.

$$A-B=C=[c_{ij}]=[a_{ij}-b_{ij}]$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{2\times3}$ $B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix}_{2\times3}$ toplamlarını ve farklarını bulunuz.

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad A-B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -8 \\ -6 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

NOT: Aynı mertebeden olmayan matrisler toplanamazlar ve çıkarılamazlar.

Bir Matrisin Bir Sayı İle Çarpımı:

A bir matris, k da sabit bir sayı olmak üzere bu matrisin bütün elemanlarını k ile çarparak elde edilen matrise $kA=Ak$ A matrisinin k sayısıyla çarpımı denir.

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ $k=2$ olsun.

$$kA=Ak=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -8 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

Matrislerin Toplamına Ait Özellikler:

A, B, C matrisleri aynı mertebeden matrisler olsunlar.

1-) $A+B=B+A$ (Değişme Öz.)
2-) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (Birleşme Öz.)
3-) $k(A+B)=kA+kB=Ak+Bk=(A+B)k$
4-) $A+D=B$ olacak şekilde bir D matrisi vardır.

Matrislerin Çarpımı:

Herhangi iki matrisin çarpılması için ilk koşul I. çarpan olan matrisin sütun sayısı ile II. çarpanın [illegible] satır sayısının eşit olmasıdır.

A matrisinin i numaralı satır elemanlarının, B matrisinin j numaralı sütun elemanları ile karşılıklı çarpılıp toplanması sonucu C matrisinin c_{ij} elemanı elde edilir. Tüm satırlar ve sütunlar arasında bu işlem yapılır.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 7\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}_{2\times3}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 4 & -2\\ 1 & 5 & 1 & 3\end{bmatrix}_{3\times4}$

$$A.B=\begin{bmatrix}8 & 35 & 9 & 20\\ 1 & -3 & 9 & -8\end{bmatrix}_{2\times4}$$

Matrislerin Çarpımına Ait Özellikler:

A, B, C matrisleri toplanıp çarpılabilir boyutta matrisler olsunlar. Buna göre:

1-) $A.(B+C)=AB+AC$
2-) $(A+B).C=AC+BC$
3-) $A.(BC)=(AB).C$
4-) $AB\neq BA$
5-) $AB=0$ ise $A=0$ veya $B=0$ olmak zorunda değildir.
6-) $AB=AC$ ise $B=C$ olmak zorunda değildir.

Köşegen Matris:

A matrisi n boyutlu bir kare matris olsun. $a_{ij}=0$ ise $(i\neq j)$ bu matrise köşegen matris denir.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Skaler Matris:

Bir köşegen matriste $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=k$ ise köşegen matrise skaler matris denir.

$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$

Birim Matris:

Bir skaler matriste $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$ ise skaler matrise birim matris denir. Birim matris I_n şeklinde gösterilir.

$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

NOT: Bir A matrisinin birim matrisle sağdan ya da soldan çarpımı yine A matrisine eşittir.

$AI=IA=A$

Bir Kare Matrisin Kuvveti:

A matrisi bir kare matris olsun. A'nın kendisiyle p defa çarpımına A matrisinin p. kuvveti denir.

$$A^p = \underbrace{A.A.\_\_\_.A}_{p \text{ tane}}$$

Bir Kare Matrisin İnversi (Tersi):

$AB = BA = I$ eşitliğini sağlayan A ve B matrislerine birbirlerinin inversi matrisler denir.

A'nın inversi $A^{-1} = B$
B'nin inversi $B^{-1} = A$

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

NOT: Bir kare matrisin inversi varsa bu tektir.

A, B kare matrisleri ve bunların inversleri A^{-1}, B^{-1} olsun.

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}}$$

Bir Matrisin Transpozesi:

mxn mertebeli bir A matrisinin aynı numaralı satırlarla sütunlarının yer değiştirmesinden oluşan nxm mertebeli matrise A matrisinin transpozesi denir. A', A^T şeklinde gösterilir.

NOT: 1-) A matrisinin transpozesi A' ise $(A')' = A$
2-) A matrisinin transpozesi A' ve k sabit bir sayı olmak üzere $(kA)' = k.A'$
3-) $(A+B)' = A' + B'$
4-) $(AB)' = B'.A'$

Simetrik Matris:

$A' = A$ eşitliğini sağlayan A matrisine simetrik matris denir.
$A = [a_{ij}]$ simetrik matris ise $a_{ij} = a_{ji}$ olacağı açıktır.
A matrisi bir simetrik matris, k sabit bir sayı olmak üzere kA yine simetrik bir matristir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 10 & 20 \\ 3 & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

Anti-simetrik Matris:

$A' = -A$ eşitliğini sağlayan A matrisine anti-simetrik matris denir.
$A = [a_{ij}]$ anti-simetrik matris ise $a_{ij} = -a_{ji}$ olacağı açıktır.
A matrisi anti-simetrik bir matris, k sabit bir sayı olmak üzere kA yine anti-simetrik bir matristir.

Bir Matrisin Eşleniği:

Elemanları kompleks sayılar olan bir A matrisinin bu elemanlarının yerine eşleniklerinin yazılmasıyla elde edilen matrise A matrisinin eşleniği denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

$$A=\begin{bmatrix} 3+4i & i & 1+i \\ 5 & 2-i & -6i \end{bmatrix} \qquad \overline{A}=\begin{bmatrix} 3-4i & -i & 1-i \\ 5 & 2+i & +6i \end{bmatrix}$$

DETERMINANTLAR

Tamsayılarla Yapılan Bir Permütasyondaki İnversiyonlar:

İki sayı, tamsayılarla yapılan bir permütasyona ait oldukları halde bunlardan büyük olan sayı, küçük olan sayıdan önce gelmiş ise bu iki sayı arasında bir inversiyon oluşturuyor denir. Bir permütasyonda büyüklük sırası kaç defa bozulmuş ise o kadar inversiyon vardır denir.

$a, b, c, \ldots, k, l$ permütasyonunda
a'dan küçük terimlerin sayısı α
b'den sonra b'den küçük terimlerin sayısı β
c'den " c'den " " " γ

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots \quad \text{(İnversiyon sayısı)}$$

Örnek: 6 9 4 1 5 11 2 permütasyonundaki inversiyon sayısı bulunuz.

$$4+4+2+1+1=12$$

Determinantın Tanımı:

Reel veya kompleks sayı değişken hatta fonksiyon olabilen n^2 tane elemanı n satır ve n sütunda oluşan kare şeklinde bir tabloya yerleştirelim.

	1	2	3	4	...	n
1	a	b	c	d	...	x
2	e	f	g	h	...	y
3	k	l	m	p	...	t
⋮	—	—	—	—	—	—
⋮	—	—				
n	u	v	y	...	...	z

Aynı satır ve aynı sütundan birden fazla

Satırları ve sütunları numaralandıralım. Bu tablonun her bir satır ve sütunundan bir ve yalnız bir elemanı çarpan olarak çarpımlar oluşturalım.

a g l ...
1 2 3 ... (Satır numarası)
1 3 2 ... (Sütun numarası)

Böylece satırlar permütasyonu 1'den n'ye kadar tamsayıların permütasyonu olur. Aynı şekilde sütun numaraları da n tane sayının permütasyonu olur. Bu permütasyonda tekrar eden eleman yoktur. Çünkü her satır ve her sütundan bir ve yalnız bir eleman alıyoruz.

Bir kare tablo şeklinde dizilmiş n^2 tane elemanın determinantı diye her satır ve her sütundan bir ve yalnız bir elemanı çarpan olarak alıp çarpımlarını oluşturacağız. Buna karşı gelen satırların ve sütunların permütasyonlarındaki inversiyon sayısı I ve I' ise $(-1)^{I+I'}$ işaretini vererek bulunacak birbirinden farklı bütün çarpımların cebirsel toplamına determinant denir.

Örnek:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$a_{11}\, a_{22}$ — 12 — $I=0$
 21 — $I'=0$

$a_{21}\, a_{12}$ — 21 — $I=1$
 12 — $I'=0$

$$= (-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^{1+0} a_{21} a_{12}$$
$$= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

Örnek:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$ — $I=0$, $I'=0$

$a_{11}\, a_{32}\, a_{23}$ — $I=1$, $I'=0$

$a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$ — $I=0$, $I'=1$

$a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$ — $I=0$, $I'=2$

$a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$ — $I=0$, $I'=3$

$a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$ — $I=0$, $I=2$

$$a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^{1+0} a_{11} a_{32} a_{23} + (-1)^{0+1} a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^{0+2} a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^{0+3} a_{13} a_{22} a_{31} + (-1) \ldots a_{13} a_{21} a_{32} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

Minör:

Determinantta bir elemanın ait olduğu satır ve sütun silinerek elde edilen determinanta bu elemanın minörü denir.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

a_1 in minörü: $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b_1 in minörü: $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

c_1 in minörü: $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

Eşçarpan:

Bir determinantta p. satır ve k. sütunda bulunan a_{pk} elemanının minörünü $(-1)^{p+k}$ ile çarptığımızda elde edilen değer a_{pk} elemanının eşçarpanıdır.

Determinantların Özellikleri:

1-) İki satır (ya da iki sütun) yer değiştirirse determinantın işareti değişir.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2-) Bir determinantta aynı numaralı satırlarla sütunlar yer değiştirdiği zaman determinantın değeri değişmez.

3-) Determinantta iki satır (ya da iki sütun) birbirinin aynı ise bu determinant 0'a eşittir.

4-) Determinant, herhangi bir satırdaki (ya da sütundaki) elemanların kendi eş çarpanları ile çarpımlarının toplamına eşittir. Buna Laplace açılımı da denir.

$$a_1 (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

5-) Bir determinantta herhangi bir satırın (ya da sütunun) bütün elemanları 0 ise bu determinant 0'a eşittir.

6-) Determinantta aynı bir satır (veya sütun) elemanlarının ortak bir çarpanı varsa bu çarpan determinantın dışına çıkarılabilir.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & 12 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 12 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

7-) İki satırın (ya da sütunun) karşılıklı elemanları orantılı ise determinant 0'a eşittir.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

8-) Herhangi bir satırın (ya da sütunun) elemanları iki sayının toplamı şeklindeyse bu determinant iki determinantın toplamı olarak yazılabilir.

$$\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+y & c_1+z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

9-) Bir satıra (ya da sütuna) diğer satırların (ya da sütunların) lineer kombinasyonu eklenirse determinantın değeri değişmez.

10-) Bir satırdaki (ya da sütundaki) elemanların başka bir satır (ya da sütun) elemanlarının eşçarpanları ile çarpımlarının toplamı 0'dır.

Sarrus Kuralı:

Sadece 3. mertebeden determinantların hesabında kısaca Sarrus kuralı uygulanır.

$$\begin{array}{|ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

$$a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 - c_1b_2a_3$$

Örnek:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 4 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$ determinantını hesaplayınız.

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & -10 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & 22 \end{vmatrix}$$

$$= 1.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -10 & 3 \\ 4 & -7 & 22 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} + 0$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -10 & 3 \\ 4 & -7 & 22 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -10 & 3 \\ [illegible] & -5 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 13 & -46 \\ 0 & 25 & -116 \\ 1 & -5 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 13 & -46 \\ 25 & -116 \end{vmatrix}$$

$$= 13(-116) - (-46)(25)$$
$$= -358$$

Örnek:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$ determinantını hesaplayınız.

$$= 2 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 2 \\ 9 & 5 & 11 & 3 \\ 13 & 7 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -8 & -3 \\ 9 & -4 & -16 & -6 \\ 13 & -6 & -24 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} -2 & -8 & -3 \\ -4 & -16 & -6 \\ -6 & -24 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

Örnek:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Örnek:

2. sütunu 3. sütuna ekle

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+c+a \\ 1 & c & c+a+b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Örnek:

1. satırı −1 ile çarpıp ekle

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos a & \cos b \\ 1 & \cos a & 1 & \cos c \\ 1 & \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cos a-1 & \cos b-1 \\ 0 & \cos a-1 & 0 & \cos c-1 \\ 0 & \cos b-1 & \cos c-1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cos a-1 & \cos b-1 \\ \cos a-1 & 0 & \cos c-1 \\ \cos b-1 & \cos c-1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\cos a - 1)(\cos c - 1)(\cos b - 1) + (\cos a - 1)(\cos c - 1)(\cos b - 1)$$
$$= 2(\cos a - 1)(\cos b - 1)(\cos c - 1)$$

Örnek: $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ determinantını çarpanlarına ayırınız.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 0 & y-x & zx-yz \\ 0 & z-x & xy-yz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z(x-y) \\ z-x & y(x-z) \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & -y \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)(z-y)$$

Örnek: $\begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{vmatrix}$ determinantlarının birbirlerine eşit olduğunu gösteriniz.

$$\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & a^2b & a^2c \\ ab^2 & abc & b^2c \\ ac^2 & c^2b & abc \end{vmatrix} = \frac{1}{\cancel{abc}}\cancel{abc}\begin{vmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{vmatrix}$$

Örnek: $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix}$ determinantını çarpanlarına ayırınız.

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & abcd \\ b^3 & b^2 & b & abcd \\ c^3 & c^2 & c & abcd \\ d^3 & d^2 & d & abcd \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3-a^3 & b^2-a^2 & b-a & 0 \\ c^3-a^3 & c^2-a^2 & c-a & 0 \\ d^3-a^3 & d^2-a^2 & d-a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} b^3-a^3 & b^2-a^2 & b-a \\ c^3-a^3 & c^2-a^2 & c-a \\ d^3-a^3 & d^2-a^2 & d-a \end{vmatrix}$$

$$= -(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} b^2+ab+a^2 & b+a & 1 \\ c^2+ac+a^2 & c+a & 1 \\ d^2+ad+a^2 & d+a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} b^2+ab+a^2 & b+a & 1 \\ c^2+ac-ab-b^2 & c-b & 0 \\ \ldots \end{vmatrix}$$

$$= -(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c^2+ac-b^2-ab & \ldots \\ d^2+ad-b^2 \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= -(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} a+b+c & 1 \\ a+b+d & 1 \end{vmatrix}$$

$= -(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(c-d)$

$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ Vandermonde det.

Örnek:

1. satırı x parantezine al

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+t \end{vmatrix} = xyzt\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$$

eşit olduğunu gösteriniz.

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x(1+\frac{1}{x}) & x\cdot\frac{1}{x} & x\cdot\frac{1}{x} & x\cdot\frac{1}{x} \\ y\cdot\frac{1}{y} & y\cdot(1+\frac{1}{y}) & y\cdot\frac{1}{y} & y\cdot\frac{1}{y} \\ z\cdot\frac{1}{z} & z\cdot\frac{1}{z} & z\cdot(\frac{1}{z}+1) & z\cdot\frac{1}{z} \\ t\cdot\frac{1}{t} & t\cdot\frac{1}{t} & t\cdot\frac{1}{t} & t\cdot(\frac{1}{t}+1) \end{vmatrix}$$

$$= xyzt \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{x} & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} & 1+\frac{1}{y} & \frac{1}{y} & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{z} & 1+\frac{1}{z} & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{t} & \frac{1}{t} & \frac{1}{t} & 1+\frac{1}{t} \end{vmatrix}$$

$$= xyzt \begin{vmatrix} 1+1/x+1/y+1/z+1/t & - & - & - \\ 1/y & 1+\frac{1}{y} & 1/y & 1/y \\ 1/z & 1/z & 1+\frac{1}{z} & 1/z \\ 1/t & 1/t & 1/t & 1+\frac{1}{t} \end{vmatrix}$$

$$= (xyzt)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/y & 1+\frac{1}{y} & 1/y & 1/y \\ 1/z & 1/z & 1+\frac{1}{z} & 1/z \\ 1/t & 1/t & 1/t & 1+\frac{1}{t} \end{vmatrix}$$

I. sütunu ile çarp. ekle

$$= (xyzt)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/y & 1 & 0 & 0 \\ 1/z & 0 & 1 & 0 \\ 1/t & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (xyzt)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (xyzt)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$$

Elemanter Dönüşümler:

Bir Matrisin Rangı

0 olmayan bir A matrisinin r mertebeli kare minörlerinden en az 1 tanesi sıfırdan farklı, fakat (r+1) mertebeli kare minörlerinin hepsi 0 ise A matrisinin rangı r_A'dır denir. 0 matrisinin rangı 0'dır.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ matrisinin rangını bulunuz.

$|A| = 21+24+30-27-28-20$

$|A| = 75-75 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-4 = -1 \neq 0$$

$r_A = 2$

Tanım: Mertebesi n olan bir A kare matrisinin rangı $r_A = n$ ise yani $|A| \neq 0$ ise A matrisi tekil değildir (singüler değildir). Aksi halde A matrisi tekildir ya da singülerdir.

Elemanter Dönüşümler

1-) Bir matrisin i ve j numaralı satırlarının yerlerini değiştirmek.
H_{ij} H_{13}

2-) Bir matrisin i ve j numaralı sütunlarının yerlerini değiştirmek.
K_{ij} K_{15}

3-) Bir matrisin i numaralı satır elemanlarını 0'dan farklı bir k sayısı ile çarpmak.
$H_i(k)$ ile gösterilir. $H_1(3)$

4-) Bir matrisin i numaralı sütun elemanlarını 0'dan farklı bir k sayısı ile çarpmak.
$K_i(k)$ ile gösterilir.

5-) Bir matrisin j numaralı satır elemanlarını bir k sayısı ile çarpıp bu elemanlara karşılık gelen i numaralı satır elemanlarına eklemek.
$H_{ij}(k)$ ile gösterilir. $H_{13}(4)$

6-) Bir matrisin j numaralı sütun elemanlarını bir k sayısı ile çarpıp bu elemanlara karşılık gelen i numaralı sütun elemanlarına eklemek.
$K_{ij}(k)$ ile gösterilir.

NOT: Elemanter dönüşümler bir matrisin rangını değiştirmez.

Denk Matrisler:

A ve B matrislerinden biri diğerinden elemanter dönüşüm ile elde edilmişse bu matrislere denk matrisler denir. A~B ile gösterilir. Elemanter dönüşümler bir matrisin rangını değiştirmediğinden denk matrislerin rangı birbirine eşit.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{23}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \text{[illegible]} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$r_A = 2$

Matrisin Kanonik Şekle Dönüştürülmesi:

0 olmayan bir A matrisinin rangı r olsun. Elementer satır işlemleri ile A matrisi aşağıdaki özellikleri olan bir B matrisine dönüştürülmüş ise A matrisine kanonik şekle dönüştürülmüştür denir.

1-) B matrisinin ilk r satırının herbirinde en az 1 eleman 0'dan farklı, diğer satırlardaki elemanların tümü 0'dır.

2-) Her satırda 0 olmayan ilk eleman 1'dir.

3-) İlk 1 elemanının bulunduğu sütundaki diğer elemanların tümü 0'dır.

4-) İlk 1'in solunda bulunan sıfırların sayısı satır numarası arttıkça çoğalır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$ matrisini kanonik şekle dönüştürünüz.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \underset{\substack{H_{21}(-2)\\ H_{31}(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \underset{H_{32}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{H_2\left(\frac{1}{5}\right)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{H_{12}(1)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-\frac{3}{5}+4$

$r_A=2$ (İki tane 0'dan farklı olan satırı var.)

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisini kanonik şekle dönüştürünüz ve rangını bulunuz.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{H_{32}(-2)\\ H_{42}(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{H_{21}(-2)\\ H_{31}(1)\\ H_{41}(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{H_{12}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad r_A=2$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\1&3&2&2\\2&4&3&4\\3&7&4&6\end{bmatrix}$ kanonik şekle dönüştürerek rangını bulunuz.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\1&3&2&2\\2&4&3&4\\3&7&4&6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$H_{21}(-1)$, $H_{31}(-2)$, $H_{41}(-3)$ $\qquad$ $H_{12}(-2)$, $H_{42}(-1)$ $\qquad$ $H_{13}(1)$, $H_{23}(-1)$

$\underline{r_A=3}$

Örnek:

$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\3&2&1&2\\2&-1&2&5\\5&6&3&2\\1&3&-1&-3\end{bmatrix}$ kanonik şekle dönüştürerek rangını bulunuz.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\3&2&1&2\\2&-1&2&5\\5&6&3&2\\1&3&-1&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&-4&-2&2\\0&-5&0&5\\0&-4&-2&2\\0&1&-2&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&-4&-2&2\\0&-5&0&5\\0&0&0&0\\0&1&-2&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&-4&-2&2\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&1&-2&-3\end{bmatrix}\sim$$

$H_{21}(-3)$, $H_{31}(-2)$, $H_{41}(-5)$, $H_{51}(-1)$ $\qquad$ $H_{42}(-1)$ $\qquad$ $H_3\left(-\frac{1}{5}\right)$ $\qquad$ $H_{23}(4)$, $H_{53}(-1)$, $H_{13}(-2)$

$$\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&0&-2&-2\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&-2&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&0&-2&-2\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&0&1&1\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim$$

$H_{52}(-1)$ $\qquad$ $H_2\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $H_{12}(-1)$ $\qquad$ H_{23}

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad r_A=3$$

Ek Matrisi:

[illegible] A_{ij} [illegible] elemanlarının eş [illegible] [illegible] $[A_{ij}]$ lerden oluşan matrise A matrisinin ek [illegible] [illegible] A^* ile gösterilir.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\qquad A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&A_{3n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$$

Ek matrisi bulurken kolaylık olsun diye A matrisinin transpozesi alınır. Sonra her çarpanın yerine kendi eş çarpanı yazılır.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{bmatrix}$ $A^*=?$

$$A'=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$A^*=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

$$A^*=\begin{bmatrix}6 & 1 & -5\\ -2 & -5 & 4\\ -3 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ $A^*=?$

$$A'=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix} \qquad A^*=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$ $A^*=?$

$$A'=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$A^*=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$A^*=\begin{bmatrix}-7 & 6 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

Bir Matrisin İnversi (Tersi):

A matrisi n mertebeden tekil(singüler) olmayan bir kare matris ise $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$ dır.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{bmatrix}$ $A^{-1}=?$

$$\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}\sim\begin{vmatrix}\cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3}\\ 0 & -1 & -4\\ 0 & -3 & -5\end{vmatrix}=5-12=-7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ simetrik matrisinin inversinin de simetrik olup olmadığını bulunuz.

$$\begin{matrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} -36 & 18 & 6 \\ 18 & -9 & 9 \\ 6 & 9 & 6 \end{vmatrix} = A^*$$

simetrik

LİNEER DENKLEM SİSTEMİ

1) Cramer Sistemi:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{---------} \\ \text{---------} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde n tane bilinmeyen ve n tane denklem vardır.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

ise bu denklem sistemini Cramer sistemiyle çözebiliriz.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} ;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} ;\ \dots ;\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

$\Delta_i \ (i = 1, \dots, n)$

Burada Δ_i ile gösterdiğimiz determinantlarda Δ katsayıl determinantında i. sütun yerine II. taraftaki bi değerlerinin yazılmasıyla elde edilen determinantlardır.

Örnek:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + z = 9 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + y + 2z = 9 \end{array}\right\}$$

denklem sistemini çözünüz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -(4-15) = 11 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -7 & -7 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -7 & -7 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 3.(-7)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = -21(-5+3) = -2.(-21) = 42$$

$\boxed{\Delta_1 = 42}$ $\boxed{\Delta = 11}$ $\boxed{\Delta_2 = 3}$ $\boxed{\Delta_3 = 6}$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & -7 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3(15-14) = 3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -3(1-3) = 6$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{42}{11} \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6}{11}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3}{11}$$

Örnek: $x+y-az=1$, $2x+3y+az=3$, $x+ay+3z=2$ sisteminin çözümünün olabilmesi için a ne olmalıdır?

[illegible]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2+a \\ 0 & a-1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2+a \\ a-1 & 4 \end{vmatrix} = 4-(2+a)(a-1) \neq 0$$

$$4-(2a-2+a^2-a) \neq 0$$
$$-a^2-a+6 \neq 0$$
$$a \neq -3 \quad a \neq 2$$

2) Katsayılar Matrisinin İnversi Yardımıyla Çözüm:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = P_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = P_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = P_n \end{array}\right\} \quad |A| \neq 0 \text{ ise } A^{-1} \text{ vardır}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

$$AX = P$$
$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}P$$
$$\boxed{X = A^{-1}P}$$

Örnek: $x_1+3x_2+x_3=2$, $2x_1-x_2+3x_3=1$, $x_1+2x_2-x_3=3$ sistemi katsayılar matrisinin inversi yardımıyla çözünüz.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 14+1 = 15 \neq 0$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad A^{*} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 5 & -2 & -1 \\ -5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{A^{*}}{|A|} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} [illegible] & [illegible] & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] & -1 \\ -5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}P$

$$X = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 5 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -10 + 5 + 30 \\ 10 - 2 - 3 \\ 10 + 1 - 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 25 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{5}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = -\frac{2}{3}$$

Örnek: $\left.\begin{array}{l} x+2y-z=2 \\ 2x-y+z=1 \\ -x+y-2z=1 \end{array}\right\}$ denklem sistemini katsayılar matrisinin inversi yardımıyla çözünüz.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 15 - 9 = 6 \neq 0$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}P$

$$X = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{array}\right\}$$

Örnek: $\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -1 \end{array}\right\}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^* = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}P$$

$$X = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

3) Arttırılmış Matris Yöntemi İle Çözüm:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\}$$ Bu sistemi arttırılmış matris yöntemiyle çözelim.

$$[AB] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$ arttırılmış matrisin rangı ile

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ katsayılar matrisinin rangı eşit ise sistemin çözümü vardır. Aksi halde sistemin çözümü yoktur.

Değişken sayısı n rang r olsun. Eğer, $n > r$ ise $n-r$ tane keyfi sabit seçilir ve diğer bilinmeyenler de bu keyfi sabite bağlı olarak çözülür.
Eğer, $n = r$ ise tek çözüm vardır.

Örnek: $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 7x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$ sistemini arttırılmış matris yöntemiyle çözünüz.

$$[AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 14/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & -4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r_{AB} = 2$ [illegible]

Sistemin çözümü [illegible]

$n=3$
$r=2$
$n-r=3-2=1$ keyfi sabit seçilir.

$x_3=a$ olsun.

$$x_1+\frac{14}{5}x_3=\frac{3}{5} \longrightarrow \quad x_1=\frac{3}{5}-\frac{14}{5}a$$
$$x_2-\frac{4}{5}x_3=\frac{2}{5} \longrightarrow \quad x_2=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}a$$
$$x_3=a$$

Örnek:
$$\left.\begin{aligned} x_1+4x_2-x_3&=7\\ 2x_1+3x_2-2x_3&=9\\ x_1+x_2+x_3&=4\\ 3x_1+12x_2+x_3&=21\end{aligned}\right\}$$

$$[AB]=\begin{bmatrix}1&4&-1&7\\2&3&-2&9\\1&1&1&4\\3&12&1&21\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&-1&7\\0&-5&0&-5\\0&-3&2&-3\\0&0&4&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-4&-1&7\\0&1&0&1\\0&-3&2&-3\\0&0&1&0\end{bmatrix}\sim$$

$H_{21}(-2)$ $\quad H_2\left(-\frac{1}{5}\right)$ $\quad H_{12}(-4)$
$H_{31}(-1)$ $\quad H_4\left(\frac{1}{4}\right)$ $\quad H_{32}(3)$
$H_{41}(-3)$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&3\\0&1&0&1\\0&0&2&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$H_{14}(1)$ $\quad H_{34}$
$H_{34}(-2)$

$n=3$
$r_{AB}=3 \quad r_A=3$ sistemin çözümü vardır.

$n=r$ tek çözüm vardır.

$$\begin{pmatrix} x_1=3\\ x_2=1\\ x_3=0\end{pmatrix}$$

Örnek:
$$\left.\begin{aligned} x+y-z&=0\\ 2x+y-z&=1\\ 3x+2y-2z&=1\end{aligned}\right\}$$

$$[AB]=\begin{bmatrix}1&1&-1&0\\2&1&1&1\\3&2&-2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\0&-1&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&-1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$H_{21}(-2)$ $\quad H_{32}(-1)$ $\quad H_2(-1)$
$H_{31}(-3)$ $\quad H_{12}(1)$

$r_{AB}=2 \quad r_A=2$

$n=3$

$r=2$ 1 keyfi sabit

$z=1$ olsun.

$x=1$

$y-z=-1 \Rightarrow y=0$

$$\begin{pmatrix} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x=1 \\ y=2-1 \\ z=2 \end{pmatrix}$$

Örnek:
$$\left.\begin{aligned} x+y-z&=0 \\ 2x+y-z&=1 \\ 3x+2y-2z&=5 \end{aligned}\right\}$$

$$[AB]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$H_{21}(-2)$ $H_{32}(-1)$ $H_3\left(\frac{1}{4}\right)$

$H_{31}(-3)$ $H_{12}(1)$ $H_2(-1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$H_{13}(-1)$

$H_{23}(1)$

$r_{AB}=3$

$r_A=2$

$r_{AB}\neq r_A$ sistemin çözümü yoktur

ii)

Lineer Homojen Denklem Sistemi

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \cdots + a_{1m}x_m&=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+ \cdots + a_{2m}x_m&=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+ \cdots + a_{nm}x_m&=0 \end{aligned}\right\}$$

şeklindeki sisteme lineer homojen denklem sistemi denir. Bu sistemi [illegible] yazılır.

$AX=0$

$x_1=x_2=\cdots=x_m=0$ [illegible]

0 çözümüne [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] değişken [illegible] [illegible] olması [illegible]

$(r<m)$ Eğer $r<m$ [illegible]

Örnek: $\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=0\\ 2x_1+x_2+3x_3&=0\\ 3x_1+2x_2+x_3&=0\end{aligned}\right\}$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-3\\0&-4&-8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$H_{21}(-2)$, $H_{31}(-3)$ — $H_2\left(-\frac{1}{3}\right)$, $H_3\left(-\frac{1}{4}\right)$ — $H_{12}(-2)$, $H_{32}(-1)$ — $H_{13}(-1)$, $H_{23}(-1)$ — $r=3$, $n=3$

$$\begin{pmatrix}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{pmatrix}$$

Örnek: $\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_3&=0\\ 3x_1+2x_2+x_3&=0\\ x_1-4x_2+5x_3&=0\end{aligned}\right\}$

$$\begin{bmatrix}2&-1&3\\3&2&1\\1&-4&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-4&5\\3&2&1\\2&-1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-4&5\\0&14&-14\\0&7&-7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-4&5\\0&1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

H_{13} — $H_{21}(-3)$, $H_{31}(-2)$ — $H_2\left(\frac{1}{14}\right)$, $H_3\left(\frac{1}{7}\right)$ — $H_{32}(-1)$, $H_{12}(4)$

$r=2$
$n=3$
1 keyfi sabit seçilir.

$x_3=1$ olsun.

$x_1+x_3=0$
$x_2-x_3=0$

$$\begin{pmatrix}x_1=-1\\x_2=1\\x_3=1\end{pmatrix}$$

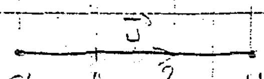
YEDA TURAN

Örnek:

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

VEKTÖRLER

Yönlendirilmiş doğru parçasına vektör denir. Bir vektörün başlangıç ve bitim noktası, doğrultusu, yönü, modülü veya uzunluğu vardır.



doğrultusu x–y
yönü A'dan B'ye doğru

Bir vektör, başlangıç ve bitim noktaları yardımıyla gösterilir. ($\vec{AB}$ veya $\vec{u}$)

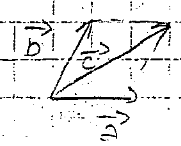
Vektörlerin Eşitliği:

Doğrultuları ve yönleri aynı, uzunlukları (modülleri) eşit olan vektörlere eşit vektörler denir.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ eşit ise $\vec{v} = \vec{u}$ ile gösterilir.

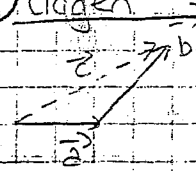
İki Vektörün Toplamı:

1) Paralelkenar Kuralı:



$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

2) Üçgen Kuralı:



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Sıfır Vektör:

[illegible] $\vec{b} = \vec{0}$ denir. Modülü sıfır, doğrultu ve yönü yoktur.

Bir Vektörün Bir Sayı İle Çarpımı:

Bir $\vec{a}$ vektörünün bir k sayısı ile çarpımı $k\cdot\vec{a} = \vec{b}$ $\Rightarrow$

$\vec{b}$ vektörünün özellikleri:

1) $|\vec{b}| = k \cdot |\vec{a}|$

2) $\vec{b}$'nin doğrultusu $\vec{a}$'nınkiyle aynıdır.

3) $k > 0 \Rightarrow \vec{b}$ ile $\vec{a}$'nın yönleri aynı
$k < 0 \Rightarrow$ yönleri zıt
$k = 0 \Rightarrow$ sıfır vektördür.

Vektörlerin Toplamına Ait Özellikler:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektör, k ile l skaler sayılar olmak üzere

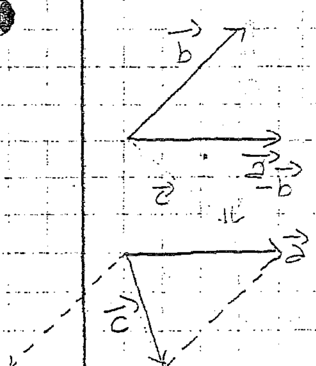
1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
3) $k.\vec{a}=\vec{a}.k$
4) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$
5) $(k+l)\vec{a}=k.\vec{a}+l.\vec{a}$
6) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

Birim Vektör:

Her vektörün kendi doğrultusu ve yönünde modülü 1'e eşit bir birim vektör vardır.

$\vec{u}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ $\quad \vec{a}=|\vec{a}|.\vec{u}$

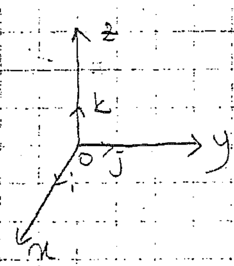
İki Vektörün Farkı:



$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$

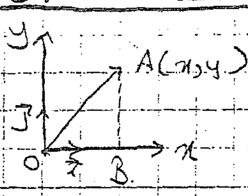
$\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{c}$

Kartezyen Baz Vektörleri:



x, y, z eksenlerinin pozitif yönünde olan ve başlangıç noktaları koordinat ekseninin başlangıç noktası olan $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektörlerine kartezyen baz vektörleri denir.

Bir Vektörün Bileşenleri:



$\vec{OA}=\vec{OB}+\vec{BA}$

$\vec{OB}=x.\vec{i}$

$\vec{BA}=y.\vec{j}$

$\vec{OA}=x\vec{i}+y\vec{j}$ $\qquad \vec{OA}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

Buradaki $x\vec{i}$ ve $y\vec{j}$ vektörlerine $\vec{OA}$ vektörünün x−y doğrultusundaki bileşenleri denir.

Yer Vektörü:

Başlangıç noktası, koordinat sisteminin başlangıç noktası olan vektöre yer vektörü denir ve genellikle bitim noktasının küçük harfleriyle gösterilirler.

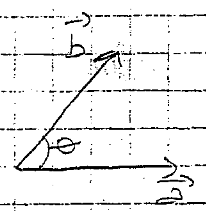
$\vec{OA} = \vec{a}$
$\vec{OB} = \vec{b}$

Örnek: Bitim noktası $A(3,6,-2)$ olan $\vec{a}$ yer vektörünü kartezyen baz cinsinden ifade edip modülünü hesaplayınız.

$\vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}$
$|\vec{a}| = \sqrt{9+36+4} = 7$

İki Vektörün Skaler Çarpımı:



$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cdot\cos\theta$

$(0 \leq \theta \leq \pi)$

Özellikler

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
3) m sabit sayı olmak üzere $m(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})m$
4) $\theta = 90°$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ olur. ($\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin diklik şartı)

Skaler Çarpımın Analitik İfadesi:

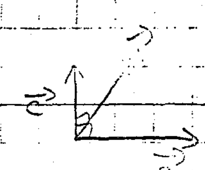
$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Vektörel Çarpım:

$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$



Özellikler:

1)

2) $\vec{c}$ = vek... parmağı $\vec{a}$ vektörünü göstermek üzere, $\vec{b}$ vektörünü de orta parmağın yönü ... alınmak üzere baş parmak yönündedir.

3) $|\vec{c}| = |\vec{a} \wedge \vec{b}| \sin\theta$

$\vec{u}$ vektörü, $\vec{c}$ vektörünün yönünde ve doğrultusunda birim vektör olmak üzere;

$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta . \vec{u}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$

$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$
$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

4) $\vec{a} = \vec{b}$ veya $\vec{a}$ paralel $\vec{b}$ ise aralarındaki açı $\theta = 0$ olacağından $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ olur. (İki vektörün paralellik şartı.)

5) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$
$\vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{b} \wedge \vec{a}$

6) $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{c})$

7) $m(\vec{a} \wedge \vec{b}) = m\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge m\vec{b} = (\vec{a} \wedge \vec{b})m$

8) Dik koordinat sisteminin birim vektörleri arasında

$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$
$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ } eşitlikleri vardır.

9) $\vec{a} \wedge \vec{b}$'nin modülü $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanına eşittir.

Karışık Çarpım:

$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$
$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ } olmak üzere;
$\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$

$$\vec{a} . (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Özellikleri

1) $\vec{a} . (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} . (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} . (\vec{a} \wedge \vec{b})$
2) $\vec{a} . (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) . \vec{c}$
3) $\vec{a} . (\vec{b} \wedge \vec{c})$ karma çarpımı $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlünün hacmine eşittir.

İki Kat Vektörel Çarpım:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ üç vektör olsun.

$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} . \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} . \vec{b})\vec{c}$
$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$

28

Örnekler:

1-) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ vektörlerinin toplamına paralel $\vec{u}$ birim vektörünü bulunuz.

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$

$|\vec{c}| = \sqrt{9+9+4} = \sqrt{22}$

$\vec{u} = \mp \dfrac{c}{|c|} = \mp \dfrac{3i - 3j - 2k}{\sqrt{22}}$

2-) Uzayda Ox ve Oy eksenlerinin pozitif yönleriyle yaptığı açılar $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$ olsun. Modülü 5 olan $\vec{r}$ vektörünü bulunuz.

NOT: $\vec{r} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ vektörünün Ox, Oy, Oz eksenlerinin pozitif yönleriyle yaptığı açılar α, β, γ olduğuna göre

$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$ dir.

$\vec{r}$ vek. Oz eks. γ olsun.

$\cos^2 60° + \cos^2 45° + \cos^2\gamma = 1$

$\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{4} + \cos^2\gamma = 1$

$\cos^2\gamma = \dfrac{1}{4}$

$\cos\gamma = \mp\dfrac{1}{2}$

$\vec{r}$ vektörünün doğrultu ve yönündeki birim vektör

$\vec{u} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\cos\beta)\vec{j} + (\cos\gamma)\vec{k}$

$\vec{u} = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \mp \dfrac{1}{2}\vec{k}$

$\vec{r} = 5\vec{u}$

$\vec{r} = 5\left(\dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \mp \dfrac{1}{2}\vec{k}\right)$

3-) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 10\vec{j} + 11\vec{k}$ a ve b vektörlerinin arasındaki açıyı bulunuz.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 20 - 66 = -40$

$|\vec{a}| = \sqrt{9+4+36} = 7$

$|\vec{b}| = \sqrt{4+100+121} = 15$

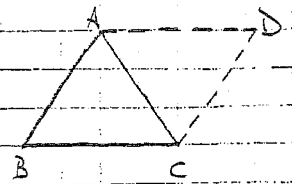
$\cos\theta = \dfrac{-40}{15 \cdot 7}$

$\cos\theta = -\dfrac{8}{21}$

$\theta = \operatorname{Arccos}\left(-\dfrac{8}{21}\right)$

4-) Köşeleri $A(1,-2,3)$, $B(5,0,-4)$, $C(0,4,-3)$ olan $\widehat{ABC}$ üçgeninin alanını bulunuz.

29



$$\text{alan } \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \text{alan}(ABCD)$$

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(30)^2+(31)^2+(-26)^2}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{2537}\ br^2$$

$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$
$\vec{b} = 5\vec{i} - 4\vec{k}$
$\vec{c} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$

$\overrightarrow{BA} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$
$\overrightarrow{BC} = -5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -2 & 7 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$ Laplace açılımı

$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = 30\vec{i} - 31\vec{j} - 26\vec{k}$

5-) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$
$\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$
$\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

1) $|\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})|$
2) $(\vec{a}.\vec{b})(\vec{b} \times \vec{c})$
3) $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{b} \times \vec{c})$
4) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c})$

1) $|\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})| = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

$\vec{a}.\vec{c} = 2+2+3 = 7$
$\vec{a}.\vec{b} = 3-2-2 = -1$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 7(3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) + (2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k})$$
$$= 23\vec{i} - 6\vec{j} + 11\vec{k}$$

$$|\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})| = \sqrt{(23)^2+(-6)^2+(11)^2} = \sqrt{686}$$

2) $(\vec{a}.\vec{b})(\vec{b} \times \vec{c})$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} + 13\vec{j} + 5\vec{k}$$

$(\vec{a}.\vec{b})(\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{i} - 13\vec{j} - 5\vec{k}$

3) $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{b} \times \vec{c})$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}$$

$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{b} \times \vec{c}) = 3 - 65 - 35 = -97$

4) $$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -5 & -7 \\ 1 & 13 & 5 \end{vmatrix} = 66\vec{i} - 22\vec{j} + 44\vec{k}$$

6-) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$
$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$
$\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlünün hacmini bulunuz.

$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 4 + 12 - 2 = 14\, br^3$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 14\, br^3$$

7-) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
$\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$
$\vec{c} = 5\vec{i} - \vec{k}$
vektörlerinin aynı düzlemde olduklarını gösteriniz.

Hacim 0 ise aynı düzlemdedirler.

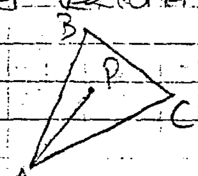
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan 3 vektör bir uzay şekli meydana getirmediğinden aynı düzlemde.

8-) $A(1, 0, -1)$
$B(4, 1, 2)$
$C(-1, 2, -2)$
noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

$P(x,y,z)$, denklemi istenen düzlemde değişken bir nokta; $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri A, B, C'nin yer vektörleri olsun.

$\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$
$\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$
$\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$
(Yer vek.) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$



$$\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \wedge \vec{AP}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ (x-1) & y & (z+1) \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$
$\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$
$\vec{AP} = \vec{r} - \vec{a} = (x-1)\vec{i} + y\vec{j} + (z+1)\vec{k}$
Paralel yüzlünün hacmi 0 olmalı.

$6z + 6 - 6y - x + 1 - 6x + 6 + 3y + 2z + 2 = 0$
$= -7x - 3y + 8z = -15$
$7x + 3y - 8z = 15$

9-) xoy düzlemine paralel ve $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ vektörüne dik $\vec{u}$ birim vektörünü bulunuz.

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (xoy'ye paralel olması için $z = 0$ olmalı)

Diklik şartı: $\vec{a} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{u} = 4x - 3y = 0 \Rightarrow 4x = 3y$, $x = \frac{3y}{4}$

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{9}{16}y^2 + y^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{25y^2}{16}} = 1 \Rightarrow \frac{5}{4}y = 1 \Rightarrow y = \frac{4}{5}$

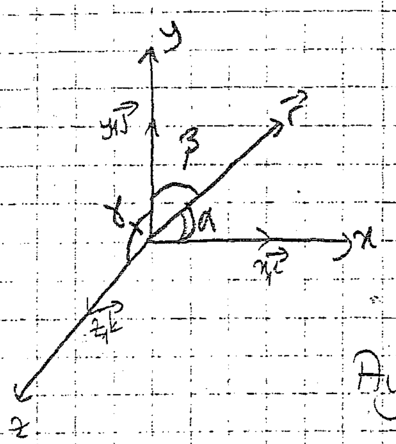
$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$

$\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$

10-) $\vec{r} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ vektörünün Ox, Oy, Oz eksenlerinin pozitif yönleriyle yaptıkları açılar α, β, γ olsun.

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ olduğunu gösteriniz.

31



$$\vec{r} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$(x_1\vec{i})\cdot(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = |x_1\vec{i}|\,|x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}|\cdot\cos\alpha$$

$$x_1^{\cancel{2}} = \cancel{x_1}\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$$

Aynı yöntem yardımıyla $\left.\begin{array}{l} \cos\beta = \dfrac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} \end{array}\right\}$ bulunur.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_1^2}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} + \frac{y_1^2}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} + \frac{z_1^2}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} = \frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{x_1^2+y_1^2+z_1^2} = 1 \text{ olu}$$

11-) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{array}\right\}$ sistemini çözünüz.

$$[AB] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \underset{H_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 11 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 7 & 13 & 11 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

H_{12} $\qquad$ $H_{21}(-2)$, $H_{31}(-3)$, $H_{41}(-2)$ $\qquad$ $H_{12}(1)$, $H_{32}(3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 11 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 40 & 40 & 32 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -11 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & 40 & 40 & 32 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -11 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$H_2(-1)$ $\qquad$ $H_3\left(\frac{1}{8}\right)$ $\qquad$ $H_{14}(-1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$H_3\left(\frac{1}{5}\right)$ $\quad H_{23}(9)$ $\quad H_{34}$ 32

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/5 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 1/5 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 4/5 \end{pmatrix}$$

12-) $\begin{vmatrix} 2ab & a^2 & b^2 \\ b^2 & 2ab & a^2 \\ a^2 & b^2 & 2ab \end{vmatrix}$ determinantını çarpanlarına ayırınız.

$$\begin{vmatrix} 2ab & a^2 & b^2 \\ b^2 & 2ab & a^2 \\ a^2 & b^2 & 2ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2ab & a^2 & b^2+a^2+2ab \\ b^2 & 2ab & a^2+b^2+2ab \\ a^2 & b^2 & 2ab+b^2+a^2 \end{vmatrix} = (a+b)^2 \begin{vmatrix} 2ab & a^2 & 1 \\ b^2 & 2ab & 1 \\ a^2 & b^2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(a+b)^2 \begin{vmatrix} 2ab & a^2 & 1 \\ b^2-2ab & 2ab-a^2 & 0 \\ a^2-2ab & b^2-a^2 & 0 \end{vmatrix} = (a+b)^2\left[(b^2-2ab)(b^2-a^2)-(2ab-a^2)(a^2-2ab)\right] =$$

$$(a+b)^2\,(a^4-2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b^4)$$

13-) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & -1 & 0 & -4 \\ 6 & -2 & 5 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & -1 & 0 & -4 \\ 6 & -2 & 5 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 5 & -9 & -19 \\ 0 & -2 & 17 & -9 & -22 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -19 & -34 \\ 0 & -2 & 17 & -9 & -22 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -12 \end{vmatrix} =$$

$H_{31}(-3)$, $H_{41}(-6)$, $H_{51}(-2)$ $\quad H_{32}(-5)$ $\quad H_{43}(-1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -19 & -34 \\ 0 & -2 & 17 & 10 & 32 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -12 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -19 & -34 \\ -2 & 17 & 10 & 32 \\ 1 & 3 & -2 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{7} \\ 0 & 0 & -19 & -34 \\ 0 & 19 & 14 & 46 \\ 0 & 2 & -4 & -19 \end{vmatrix} =$$

$H_{31}(2)$, $H_{41}(-1)$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ A^{-1}? Cayley-Hamilton teoremi ile bulunuz.

$\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$ $\lambda_3=3$

$n(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

$n(A)=(A+I)(A-2I)(A-3I)=0$

$=A^3-4A^2+A+6I=0 \;/A^{-1}$ Eşitliğin her iki tarafını A^{-1} ile çarp

$A^2-4A+I+6A^{-1}=0$

$6A^{-1}=-A^2+4A-I$

$A^{-1}=\frac{1}{6}\left(-A^2+4A-I\right)$

$\lambda_2 = -1$ için

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r=2 \quad m=3$

$u_3 = 1$ olsun.
$u_1 = 1$
$u_2 = 0$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = 2$ için

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r=2 \;\; m=3$$

$u_3 = 1$ diyelim.
$u_1 = 1$
$u_2 = 3$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Modlar Matrisi
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cayley - Hamilton Teoremi

A kare matrisi kendi karakteristik (öz) denklemini sağlar. Yani karakteristik denklem

$P(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ ise A matrisi için

$P(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 = 0$ yazabiliriz. Ayrıca A matrisinin birbirinden farklı özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_s$ olsun.

$n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_s)$ $n(\lambda)$'ya A matrisinin minimum polinomu denir.

Cayley Hamilton Teoremi, A matrisinin tersini hesaplamakta kullanılır. A matrisinin tersini bulmak için;

$P(A) = 0$ ya da $n(A) = 0$ yazılıp A^{-1} ile çarpılarak A'nın inversi bulunur.

Örnek: A matrisinin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & -2\\ -1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)\left[(2-\lambda)(-1-\lambda)-1\right]-(-1)(-1-\lambda)-2(-1)=0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-3)-(1+\lambda)+2=0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-3)-1-\lambda+2=0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-3)+(1-\lambda)=0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-3+1)=0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-1\\ \lambda_3=2\end{array}\right\}\text{özdeğerleri}$$

ya da

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}+(-1)(-1)^3\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(2-\lambda)-1\right]+\left[(-1-\lambda)+2\right]=0$$

$$(1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(2-\lambda)\cancel{-1+1}\right]=0$$

$$(1-\lambda)(-2+\lambda-2\lambda+\lambda^2)=0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=0$$

$\lambda_1=1$ için

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$r=2$ $n=3$ $u_3=1$ alalım.

$u_2=2$

$u_1=3$

$$X_1=\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$ için

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$u_1 = -2$ $\quad u_2 + u_3 = 0$ $\quad u_2 = -1$

$$-3u_1 + 2u_2 - 4u_3 = 0$$
$$2u_2 + 2u_3 = 0$$
$$-u_2 - u_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r = 2 \quad n = 3$

$u_3 = 1$ olsun. $\qquad$ veya $\qquad u_3 = -1$

$u_1 = -2 \qquad\qquad u_1 = 2$

$u_2 = -1 \qquad\qquad u_2 = 1$

$$X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = 3$ için

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r = 2 \quad n = 3 \qquad u_3 = 1$ olsun

$u_1 = -2$

$u_2 = -2$

$$X_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$[X_1 \quad X_2 \quad X_3]$ Modlar matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Özvektörlerin Bulunması:

$(A-\lambda I)X=0$ denkleminden λ_i özdeğerleri bulunsun. Eğer A matrisinin bir özdeğeri λ_i ise bu denklemde λ yerine bulduğumuz λ_i değerini yazarız.

$(A-\lambda_i I)X=0$ Bu denklem sisteminin çözümü bulunur. Bu denklem sisteminin 0'dan farklı en az bir çözümü vardır. Bu çözümü de x_i ile gösterelim. Buna A matrisinin λ_i özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -4\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz.

$$D(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2 & -4\\ 0 & 4-\lambda & 2\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(-1-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda & 2\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(-1-\lambda)\left[(4-\lambda)(1-\lambda)+2\right]=0$$

$$(-1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=0 \;\rightarrow\; \left.\begin{matrix}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=2\\ \lambda_3=3\end{matrix}\right\}\text{ özdeğerleri}$$

$\lambda_1=-1$ için

$(A-\lambda_1 I)X_1=0$

$(A-(-1)I)X_1=0$

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & -4\\ 0 & 5 & 2\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}2u_2-4u_3=0\\ 5u_2+2u_3=0\\ -u_2+2u_3=0\end{matrix}\right\}\quad \begin{matrix}u_3=0\\ u_2=0\\ u_1=1 \rightarrow \text{keyfi olarak alındı}\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & -4\\ 0 & 5 & 2\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix} \qquad X_1=\begin{vmatrix}1\\ 0\end{vmatrix}$$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda I)X=0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=0$$

(2) denklemi homojen lineer denklem sistemidir. Homojen lineer denklem sisteminin 0 çözümden başka çözümünün olması için katsayılar determinantının 0'a eşit olması gerekir.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=|A-\lambda I|=0$$

n. dereceden λ değişkenli bir polinom elde ederiz.

$|A-\lambda I|=\lambda^n+\ldots=0$. Bu polinomun n tane kökü vardır. Bu polinomdan elde ettiğimiz λ değerlerine A matrisinin özdeğerleri denir. Bu denkleme de özdenklem denir.

<u>Örnek:</u> $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)(-1-\lambda)(-1-\lambda)=0$$

$\lambda_1=2$
$\lambda_2=-1$
$\lambda_3=-1$

Örnek: $f_1 = 2x_1 - x_2 + 3x_3$, $f_2 = x_1 + 2x_2 + 4x_3$, $f_3 = 4x_1 - 7x_2 + x_3$ formlarının lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız.

39

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -15 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r = 2$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \Delta_{r+1} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3'ün eşçarpanı: -15

4'ün " : 10

1'in " : 5

$-15f_1 + 10f_2 + 5f_3 = 0$

$3f_1 - 2f_2 - f_3 = 0 \rightarrow \boxed{f_3 = 3f_1 - 2f_2}$

BİR MATRİSİN ÖZDEĞERLERİ VE ÖZVEKTÖRLERİ

A, n. mertebeden bir kare matris olmak üzere

(1) $AX = \lambda X$ denklemini sağlayan λ sayılarını ve X vektörlerini bulmak istiyoruz. Burada X, sütun vektör olarak alınmıştır ve $\vec{0}$ vektör olmamalıdır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$AX = \lambda X$

$AX - \lambda X = 0 \rightarrow (A - \lambda I)X = 0 \quad (2)$

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

1) $\Delta_{r+1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$

1'in eşçarpanı: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10-4=6$

4'ün " : $-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(5-8)=3$

6'nın " : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4=-3$

$6\vec{a}+3\vec{b}-3\vec{c}=0$
$2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=0 \longrightarrow \boxed{\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -3 \end{vmatrix} = 0$

1'in eşçarpanı: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 16-1=15$

4'ün " : $-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -(8-2)=-6$

-3'ün " : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4=-3$

$15\vec{a}-6\vec{b}-3\vec{d}=0$
$5\vec{a}-2\vec{b}-\vec{d}=0 \longrightarrow \boxed{\vec{d}=5\vec{a}-2\vec{b}}$

LINEER FORM

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ sabit sayılar; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişken olmak üzere
$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ şeklindeki polinoma lineer form ya da kısaca form denir.

Lineer Formların Lineer Bağımlılığı ve Lineer Bağımsızlığı

n değişkenli m tane,

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\ \ \vdots \\ f_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}\right\}$$ formlarını göz önüne alalım.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ katsayılar matrisinde rang form sayısından küçükse formlar lineer bağımlıdır aksi halde lineer bağımsızdır.

Örnek: $\vec{a} = [1,1,0]$, $\vec{b} = [2,0,1]$, $\vec{c} = [0,-2,1]$, $\vec{d} = [1,-3,2]$

Vektörlerin lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız. Lineer bağımlı ise, aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r=2$ $\quad m=4$ $\quad$ Vektörler lineer bağımlıdır.

$$\Delta r = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad 1)\ \Delta_{r+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

0'ın eşçarpanı: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$

1'in " : $-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$

1'in " : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$$-4\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c} = 0$$

$$2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0 \rightarrow \boxed{\vec{c} = \vec{b} - 2\vec{a}}$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

0'ın eşçarpanı: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6$

1'in " : $-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-3-1)$

2'nin " : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$$-6\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{d} = 0$$

$$3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{d} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{d} = 2\vec{b} - 3\vec{a}}$$

Örnek: $\vec{a} = [1,2,1]$, $\vec{b} = [2,1,4]$, $\vec{c} = [4,5,6]$, $\vec{d} = [1,8,-3]$

Vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız. Lineer bağımlı ise aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r=2$ $\quad m=4$

Örnek: $\vec{a}=[1,2,-3,4]$, $\vec{b}=[3,-1,2,1]$, $\vec{c}=[1,-5,8,-7]$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız. Lineer bağımlı iseler aralarındaki bağıntıyı bulunuz. 42

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 3 & -1 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 8 & -7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -7 & 11 & -11\\ 0 & -7 & 11 & -11\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -7 & 11 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$r_A=2 \quad m=3 \Rightarrow m>r$ olduğundan vektörler lineer bağımlıdır.

$$\Delta_r=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-7\neq 0 \qquad \Delta_{r+1}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & -5 & 8\end{vmatrix}=0$$

-3'ün eşçarpanı: $\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-14$

2'nin eşçarpanı: $-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -5\end{vmatrix}=+7$

8'in " : $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-7$

$-14\vec{a}+7\vec{b}-7\vec{c}=0$

$2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=0$

$\vec{b}=2\vec{a}+\vec{c}$

Örnek: $\vec{a}=[1,3,-2]$, $\vec{b}=[2,-1,1]$, $\vec{c}=[3,16,-11]$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız. Lineer bağımlı iseler aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 16 & -11\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & -7 & 5\\ 0 & 7 & -5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & -7 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad r<m$$

$r=2 \quad \Delta_r=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\neq 0$

$$\Delta_{r+1}=\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 16 & -11\end{vmatrix}=0$$

-2'nin eşçarpanı: $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 16\end{vmatrix}=32+3=35$

1'in eşçarpanı: $-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 16\end{vmatrix}=-(16-9)=-7$

-11'in eşçarpanı: $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-6=-7$

$35\vec{a}-7\vec{b}-7\vec{c}=0$

$5\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=0 \longrightarrow \boxed{\vec{c}=5\vec{a}-\vec{b}}$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2r} \\ - & - & - & - \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Delta_{r+1} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1r} & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2r} & x_{2q} \\ - & - & - & - & - \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} & x_{rq} \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pr} & x_{pq} \end{vmatrix} = 0$$

Son sütun elemanlarının eşçarpanları $k_1, k_2, \ldots, k_{r+1} = \Delta_r$
Bu eşçarpanlarla son sütun dışındaki sütun elemanlarının çarpılıp toplamı 0 'dır.

(*) $k_1 x_{1i} + k_2 x_{2i} + \cdots + k_r x_{ri} + k_{r+1} x_{pi} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

Son sütun elemanları ile kendi eşçarpanları çarpıp toplayalım

(*) $k_1 x_{1q} + k_2 x_{2q} + \cdots + k_r x_{rq} + k_{r+1} x_{pq} = \Delta_{r+1} = 0$

Δ_{r+1} determinantının son sütunu A matrisinin Δ_r'de bulunmayan herhangi bir sütunu olabilir ve bunların da yine eşçarpanları $k_1, k_2, \ldots, k_r, k_{r+1}$'dir. Yani;

$k_1 x_{1q} + k_2 x_{2q} + \cdots + k_r x_{rq} + k_{r+1} x_{pq} = 0$ 'dır $(q = r+1, \ldots, n)$

Bu iki denklemden
$k_1 x_{1i} + k_2 x_{2i} + \cdots + k_r x_{ri} + k_{r+1} x_{pi} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$

Bütün i'ler için toplamı alırsak

$k_1 \vec{a_1} + k_2 \vec{a_2} + \cdots + k_r \vec{a_r} + k_{r+1} \vec{a}_{r+1} = 0$

$k_{r+1} = \Delta_r \neq 0$ olduğundan

$\vec{a}_{r+1}$ vektörü diğer vektörlerin yani $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_r}$ vektörlerin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

Teorem:

$\vec{a_1} = [x_{11} \quad x_{12} \; \cdots \; x_{1n}]$
$\vec{a_2} = [x_{21} \quad x_{22} \; \cdots \; x_{2n}]$
$\vec{a_m} = [x_{m1} \quad \cdots \quad \cdots]$

vektörlerinin lineer bağımlı olması ve yeter koşul A matrisinin rankının ...

Eğer $r = m$ ise vektörler lineer bağımsızdır.

İspat: $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ---, \vec{a_m}, \vec{a_{m+1}}$ lineer bağımlı olduğundan,

$k_1\vec{a_1} + k_2\vec{a_2} + --- + k_m\vec{a_m} + k_{m+1}\vec{a_{m+1}} = 0$ olup $k_1, k_2, ---, k_m, k_{m+1}$ hepsi birden sıfır olmayan sayılardır.

$k_{m+1} \neq 0$ olsun

$k_{m+1} = 0$ olsaydı $k_1, k_2, ---, k_m$ hepsi birden sıfır olmadan $k_1\vec{a_1} + k_2\vec{a_2} + --- + k_m\vec{a_m} = 0$ olurdu. Bu ise $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_m}$ vektörlerinin lineer bağımsız olmasına aykırıdır. Buradan, $k_{m+1} \neq 0$ olmalıdır.

$\vec{a_{m+1}} = h_1\vec{a_1} + h_2\vec{a_2} + --- + h_m\vec{a_m}$

Teorem: $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ---, \vec{a_m}$ vektörleri arasında r tane $(r<n)$ vektör lineer bağımlı ise $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ---, \vec{a_m}$ vektörleri de lineer bağımlıdır.

İspat: $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ---, \vec{a_m}$ vektörleri arasında lineer bağımlı r vektör $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ---, \vec{a_r}$ olsun. $(r<m)$ $k_1, k_2, ---, k_r$ hepsi birden sıfır olmayan sabit sayılar olmak üzere $k_1\vec{a_1} + k_2\vec{a_2} + --- + k_r\vec{a_r} = 0$ dır. (Lineer bağımlı olduğu için)

$k_1\vec{a_1} + k_2\vec{a_2} + --- + k_r\vec{a_r} + 0\vec{a_{r+1}} + --- + 0\vec{a_m} = 0$

Bütün k'lar sıfır değildi.

$\vec{a_1}, \vec{a_2}, ---, \vec{a_r}, \vec{a_{r+1}}, ---, \vec{a_m}$ vektörleri lineer bağımlıdır.

Teorem: Elemanları,

$$\vec{a_1} = [x_{11} \quad x_{12} \quad --- \quad x_{1n}]$$
$$\vec{a_2} = [x_{21} \quad x_{22} \quad --- \quad x_{2n}]$$
$$\vdots$$
$$\vec{a_m} = [x_{m1} \quad x_{m2} \quad --- \quad x_{mn}]$$

vektörlerinin bileşenleri olan

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & --- & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & --- & x_{2n} \\ --- & --- & --- & --- \\ x_{m1} & x_{m2} & --- & x_{mn} \end{bmatrix} \quad (m \leq n) \text{ vardır.}$$

Bu Biter Bitecek

$r_A = r$ ise bu m vektörden r tanesi lineer bağımsızdır. (r ye kalan $m-r$ vektörden herbiri bu r vektörün lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

İspat: A'nın rangı r olduğundan bu matrisin sol üst köşesinde r satır ve r sütuna sıralanmış elemanlardan oluşan determinant 0'dan farklı kabul edilebilir. Gerekirse A matrisinin satırları kendi aralarında ve sütunları kendi aralarında uygun şekilde değiştirilerek 0'dan farklı olması sağlanabilir.

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

n boyutlu uzayda m tane, $\vec{a_1} = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}]$

$\vec{a_2} = [x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}]$

$\vdots$

$\vec{a_m} = [x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}]$

vektörle ile m tane $k_1, k_2, \dots$ sayılarını düşünelim.

$k_1\vec{a_1} + k_2\vec{a_2} + \dots + k_m\vec{a_m} = 0$ bağıntısı $k_1, k_2, \dots, k_m$ sayılar hepsi birden 0 olmadan sağlanıyorsa $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektörlerine lineer bağımlı, aksi halde yani $k_1, k_2, \dots, k_m$'lerin hepsi birden 0 ise vektörlere lineer bağımsız vektörler de ($k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ için sağlanıyorsa)

Tanım: $\vec{a}_{m+1}$ vektörü $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_m}$ vektörleri cinsinden $\vec{a}_{m+1} = k_1\vec{a_1} + k_2\vec{a_2} + \dots + k_m\vec{a_m}$ şeklinde ifade edilebiliyorsa (i) $\vec{a}_{m+1}$ vektörü $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_m}$ vektörlerinin lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilmiştir denir.

$\vec{a_4} = 3\vec{a_1} + 2\vec{a_2} - \vec{a_3}$

Teorem: $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_m}$ vektörleri lineer bağımlı m tane vektör ise, bunlardan bazıları diğer $m-1$ vektörün lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

İspat: $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_m}$ vektörleri lineer bağımlı olduğundan

$k_1\vec{a_1} + k_2\vec{a_2} + \dots + k_{i-1}\vec{a}_{i-1} + k_i\vec{a_i} + k_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \dots + k_m\vec{a_m} = 0$ k_n ler hepsi birden sıfır olmayan sayılar ($n = 1, \dots, m$)

$k_i \neq 0$ olsun.

$k_i\vec{a_i} = -(k_1\vec{a_1} + k_2\vec{a_2} + \dots + k_{i-1}\vec{a}_{i-1} + k_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \dots + k_m\vec{a_m})$

$k_i \neq 0$ olduğundan

$$\vec{a_i} = -\frac{1}{k_i}(k_1\vec{a_1} + k_2\vec{a_2} + \dots + k_{i-1}\vec{a}_{i-1} + k_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \dots + k_m\vec{a_m})$$

$-\frac{k_1}{k_i} = h_1$, $-\frac{k_2}{k_i} = h_2$, $\dots$, $-\frac{k_m}{k_i} = h_m$ dersek

$$\vec{a_i} = h_1\vec{a_1} + h_2\vec{a_2} + \dots + h_{i-1}\vec{a}_{i-1} + h_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \dots + h_m\vec{a_m}$$

Teorem:

$\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_m}$'nin lineer bağımsız vektöre $\vec{a}_{m+1}$ vektörünü katmakla elde edilen $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_m}, \vec{a}_{m+1}$ vektörleri lineer bağımlı ise $\vec{a}_{m+1}$ vektörü $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_m}$ vektörlerinin lineer kombinasyonu ... ifade edilebilir.

$$\begin{array}{ccc|cc} 0 & 19 & -54 & 0 & 19 \\ 19 & 14 & 46 & 19 & 14 \\ 2 & -4 & -19 & 2 & -4 \end{array}$$

$$= \{[(-19).46.2] + [(-54).19.(-4)]\} - \{[(-19).19.(-19)] + [(-54).14.2]\}$$

$$= -2991$$

14-) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^2$ eşit olduğunu determinant kurallarından yararlanarak çözünüz.