SERİLER

Bir kuralla birbirine bağlı sayılar dizisinin bütün terimlerinin toplamından elde edilen ifadeye seri denir.

Yani; $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ dizisinin terimleri toplanarak $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ serisi elde edilir ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şeklinde gösterilir.

Örneğin:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$$

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{\underbrace{2}_{1^2+1}} + \frac{1}{\underbrace{5}_{2^2+1}} + \frac{1}{\underbrace{10}_{3^2+1}} + \frac{1}{\underbrace{17}_{4^2+1}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

NOT: Bir serinin ilk teriminin 1 den başlama zorunluluğu yoktur. Gerekli olduğunda serinin indisini başka bir değerden başlatmak için değiştirebiliriz. Örneğin; $n = m-2$ dönüşümünü kullanarak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ toplamını $\sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$ şeklinde yazabiliriz.

Her iki toplam da aynı açılımı verir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots = \sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$$

Kısmi Toplamlar Dizisi ve Bir Serinin Yakınsaklığı

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin $\{S_n\}$ ile gösterilen kısmi toplamlar dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ \vdots \end{array}\right\} \quad \{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \dots\}$$

$\{S_n\}$ dizisine "$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi",

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ toplamına da "serinin n. kısmi toplamı" denir.

☆ $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ toplamı $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin n. kısmi toplamı olmak üzere, eğer $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ ise o zaman "$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi S toplamına yakınsıyor" denir ve bu

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S$ ile ifade edilir. Benzer şekilde; eğer $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi ıraksar veya $\mp\infty$'a ıraksar ise seri de aynı şekilde ıraksar veya $\mp\infty$'a ıraksar.

ÖZET :

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi için ; S_n n. kısmi toplam olmak üzere:

$\lim_{n\to\infty} S_n$ $\to = S$ ise seri S'ye yakınsar (yani toplamı S'dir)

$\to = \mp\infty$ ise seri $\mp\infty$'a ıraksar

$\to$ limit mevcut değil ise seri ıraksar

Geometrik Seri:

n. terimi $a_n = a.r^{n-1}$ olan $\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$ şeklindeki seriye "geometrik seri" denir. Burada a ve r , $a \neq 0$ ile verilen sabit sayılardır.

Geometrik serinin ilk terimi a sayısıdır. r sayısına serinin ortak oranı denir. Çünkü $n \geq 1$ için

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a.r^n}{a.r^{n-1}} = r$$ dir.

Geometrik Serinin Yakınsaklığı/Iraksaklığı:

$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$ geometrik serisinin n. kısmi toplamı S_n'i hesaplayalım.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$-\quad rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

$$\boxed{(1-r)S_n = a.(1-r^n)}$$

① Eğer $r=1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a = a+a+a+\dots+a+\dots$ serisi

elde edilir. Bu durumda $S_n = a+a+\dots+a = n.a$ ve

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n.a \begin{cases} \to +\infty & (a>0) \\ \to -\infty & (a<0) \end{cases}$ olur ki; böylece seri ıraksak

tır.

* $r\neq 1$ ise $(1-r)S_n = a.(1-r^n) \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$

② $|r|<1$ ise $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ olduğundan $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}}$ olur.

Yani seri $\frac{a}{1-r}$ ye yakınsar.

③ $r>1$ ise $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ olur. Bu durumda:

$\left.\begin{array}{l} * \ a>0 \text{ ise } \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a.(1-r^n)}{1-r} = +\infty \\ * \ a<0 \text{ ise } \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a.(1-r^n)}{1-r} = -\infty \end{array}\right\}$ olur. Yani seri $+\infty$ / $-\infty$'a ıraksar.

④ $r\leq -1$ ise. $\lim_{n\to\infty} r^n$ mevcut değildir. Dolayısıyla

$\lim_{n\to\infty} S_n$ mevcut değildir. Seri ıraksaktır.

* Bütün durumları özetlersek:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} \to \begin{cases} \to |r|<1 \text{ ise } \frac{a}{1-r}\text{'ye yakınsar} \\ \to \left.\begin{array}{l} r\geq 1 \\ a>0 \end{array}\right\} \text{ ise } +\infty\text{'a ıraksar} \\ \to \left.\begin{array}{l} r\geq 1 \\ a<0 \end{array}\right\} \text{ ise } -\infty\text{'a ıraksar} \\ \to r\leq -1 \text{ ise seri ıraksaktır.} \end{cases}$$

(*) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=?$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad a=1,\quad r=\frac{1}{2} \qquad |r|=\frac{1}{2}<1 \rightarrow \text{Seri yakınsaktır}$$

$$\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 \Rightarrow \text{Seri } 2\text{'ye yakınsar.}$$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots=2$ dir.

(*) $\pi-e+\frac{e^2}{\pi}-\frac{e^3}{\pi^2}+\dots$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\pi-e+\frac{e^2}{\pi}-\frac{e^3}{\pi^2}+\dots=\pi\left(1-\frac{e}{\pi}+\frac{e^2}{\pi^2}-\frac{e^3}{\pi^3}+\dots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\pi\cdot\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1} \qquad a=\pi,\quad r=-\frac{e}{\pi}$$

$$|r|=\left|-\frac{e}{\pi}\right|=\frac{e^{\to 2,71}}{\pi_{\to 3,14}}<1 \Rightarrow \text{Seri } \frac{a}{1-r}=\frac{\pi}{1+\frac{e}{\pi}}=\frac{\pi^2}{e+\pi}\text{'ye yakınsar.}$$

(*) $1+2^{1/2}+2+2^{3/2}+\dots=?$

$$\underbrace{}_{\sqrt{2}}\ \underbrace{}_{\sqrt{2}}\ \underbrace{}_{\sqrt{2}} \rightarrow r=\sqrt{2} \qquad a=1$$

$$1+2^{1/2}+2+2^{3/2}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2})^{n-1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=\sqrt{2}\not<1 \\ a=1>0 \end{array}\right\} \text{Seri } +\infty\text{'a ıraksar}$$

(*) $x=0,323232\dots=0,\overline{32}$ sayısını serileri kullanarak iki tamsayının oranı olarak yazınız.

$$x=0,323232\dots=\frac{32}{100}+\frac{32}{(100)^2}+\frac{32}{(100)^3}+\dots=\frac{32}{100}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{(100)^2}+\dots\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=\frac{32}{100} \\ r=\frac{1}{100}<1 \end{array}\right\} \text{Seri yakınsaktır}$$

$$x=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{32}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\underline{\underline{\frac{32}{99}}}$$

Teleskopik ve Harmonik Seriler

Teleskopik Seri: Bir serinin kısmi toplamları, eğer onun terimlerini basit kesirlere ayırarak basit olarak formüle edilebiliyorsa bu seriye "Teleskopik Seri" denir.

Harmonik Seri: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisine "Harmonik Seri" denir.

Bu seri $+\infty$'a ıraksar.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)} = ?$

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \; !$$

Seri teleskopik seridir.

$$\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = \underline{1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+1)} = \underline{\underline{1}} \text{ dir.}$$

⊛ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2} = ?$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n^2+3n+2}$$

$$\frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2} = \underline{\underline{1}}$$

(15)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = ?$$

$$S_n = \ln\frac{3}{4} + \ln\frac{8}{9} + \dots + \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \quad !$$

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right) \qquad \boxed{\ln a + \ln b = \ln a.b}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdots\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}}\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{1}{2} \,//$$

Seriler ile İlgili Bazı Teoremler:

1. $\sum a_k = A$, $\sum b_k = B$ ise $\sum a_k \mp b_k = A \mp B$, $\sum \alpha a_k = \alpha A$

2. $\sum a_n$ ıraksak ise $\alpha \sum a_n$ de ıraksaktır.

3. $\sum a_n$ ıraksak, $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n \mp b_n$ de ıraksaktır.

4. $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ her ikisi de ıraksak olsalar dahi $\sum a_n \mp b_n$ serisi yakınsak olabilir. Örneğin:

$$\left.\begin{array}{l} \sum a_n = 1+1+1+\dots \\ \sum b_n = -1-1-1\dots \end{array}\right\} \sum a_n + b_n = 0+0+\dots 0+\dots = 0 \Rightarrow \text{yakınsak}$$

5) Bir seriye sonlu sayıda terim eklemek veya silmek serinin karakterini değiştirmez.

☆☆
6) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır. (Tersi doğru değildir)

☆☆
7) n. Terim Testi:

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

⊛ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{a=1,\ r=\frac{1}{2}<1} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{a=1,\ r=\frac{1}{3}<1} = 2 - \frac{3}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \qquad \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{a=\frac{1}{3},\ r=\frac{1}{3}<1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}_{a=\frac{4}{3},\ r=\frac{2}{3}<1}$

$= \frac{\overset{a}{\frac{1}{3}}}{1-\underset{r}{\frac{1}{3}}} + \frac{\overset{a}{\frac{4}{3}}}{1-\underset{r}{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ serisi yakınsak mıdır?

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan n. terim testine göre ıraksaktır.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ serisi ıraksaktır. Çünkü $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ limiti mevcut değildir. Dolayısıyla n. terim testine göre ıraksaktır.