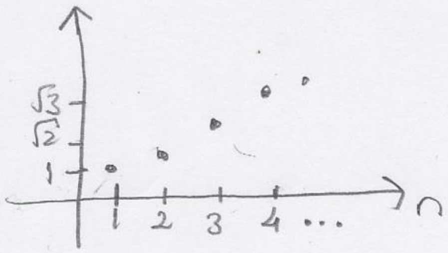
– 10.1 Diziler –

Tanım = Bir dizi verilen bir sıra ile $\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_n}_{\text{terim}}, \dots$ gibi bir sayılar listesidir. (n: indis)

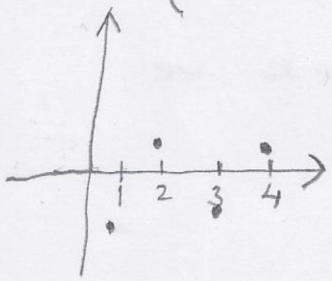
örnek = $a_n = \sqrt{n}$

$\{a_n\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}, \dots\}$



örnek = $b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

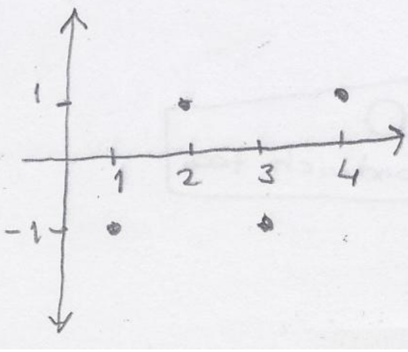
$b_n = \{-1, \frac{+1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$



Tanım = $\varepsilon > 0$ için,
Eğer $n > N$ ise $|a_n - L| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan, tüm n'ler için, bir N değeri varsa, $\{a_n\}$ dizisi L sayısına yakınsar. Diğer durumda ıraksar.

örnek = $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \to \infty} k = k$ k bir sabit sayı

örnek = $C_n = (-1)^n$, $\{C_n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$



bu dizi ıraksaktır.

Teorem: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ olsun.

1) $\lim_{n\to\infty} (a_n \mp b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \mp \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$

2) $\lim_{n\to\infty} (a_n . b_n) = A.B$

3) $\lim_{n\to\infty} (k.a_n) = k.A$, sabit bir sayı

4) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$

Teorem: Sandwich Teoremi

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ dizileri için, bir N değeri varsa;

öyleki, $n \geq N$ için $a_n \leq b_n \leq c_n$ şartı sağlanıyorsa ve

$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim c_n$ ise

$\lim_{n\to\infty} b_n = L$ olur.

Örnek: $a_n = \sin n$

$$\{a_n\} = \left\{\begin{matrix} \sin 1, & \sin 2, & \sin 3, & \sin 4, \ldots \\ \vee\!\mid & \vee\!\mid & \vee\!\mid & \wedge\!\mid \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\}$$

Örnek: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$

$-1 \leq \sin n \leq 1$

$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim \frac{\sin n}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

$$\boxed{\lim \frac{\sin n}{n} = 0 \text{ sandwich teo.}}$$

$0 \leq \lim \frac{\sin n}{n} \leq 0$

Teorem= $\{a_n\}$ bir dizi olsun, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

Ayrıca f fonksiyonu L noktasında sürekli olsun.

O zaman $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$

örnek= $b_n = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \qquad f(x) = \sqrt{x} \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}}$

$\rightarrow$

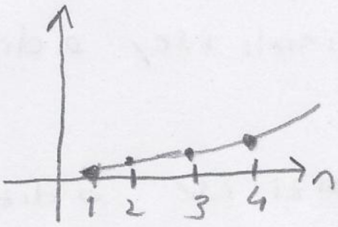
$f\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \qquad = \sqrt{1} = 1$ //

Teorem = Eğer $n \geq N$ için

$a_n = f(n)$ ise

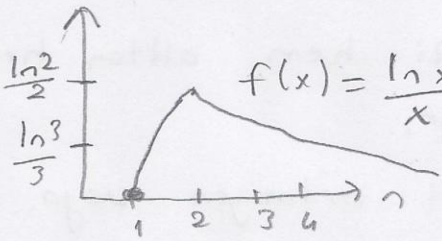
$\lim\limits_{x=\infty} f(x) = L$ olduğunda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ olur.

örnek= $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = ?$



yavaş artıyor.

$\longrightarrow$



fonksiyon yazılabilir.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$

$\hookrightarrow$ Lopital uygula

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

Sık Rastlanan Limitler

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ 2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3) $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x>0)$ 4) $\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x|<1)$

5) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ 6) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

Tanım = I- Her n için $a_n \leq a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ azalmayan bir dizidir.

II- Her n için $a_n \geq a_{n+1}$ ise $\{a_n\}$ artmayan bir dizidir.

Tanım = Her n için, $a_n \leq M$ esitsizliğini sağlayan bir M sayısı var ise, $\{a_n\}$ üstten sınırlıdır.

Her n için, $a_n \geq M$ esitsizliğini sağlayan bir M sayısı var ise $\{a_n\}$ alttan sınırlıdır.

Bir dizi hem alttan hem üstten sınırlı ise, o diziye sınırlı dizi denir.

Bir dizi artmayan veya azalmayan dizi ise o diziye monotonik dizi denir.

Teorem = Bir dizi hem monotonik hem sınırlı ise, yakınsaktır.

Uyarı = Yakınsak bir dizi sınırlıdır.

Bir dizi sınırlı ise yakınsak olmak zorunda değildir.

örnek = $a_n = (-1)^n$

Sınırlı ama yakınsak değil.

monoton değil.