1.1.2. Sonsuz Seriler

Tanım = Bir $\{a_n\}$ dizisi verilmiş olsun.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

şeklindeki bir toplama bir sonsuz seri denir.

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

ile tanımlanan $\{a_n\}$ dizisini kısmi toplamlar dizisi denir.

Eğer $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ ise

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$ serisi yakınsaktır.

Diğer durumda, $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

Geometrik Seriler

$a, r \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$$

serisine geometrik seri denir.

$S_1 = a$

$S_2 = a + ar$

$\vdots$

$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$

www.ytukampus.com

$$r s_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$S_n - r S_n = a - ar^n$$

$$S_n (1-r) = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a.(1+r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

1) Eğer $|r|>1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ yoktur.

Böylece $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ yoktur.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ serisi ıraksaktır.

2) Eğer $|r|<1$ ise, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

Böylece $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$ olur.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ olur ve yakınsaktır.

3) Eğer $r=1$ ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a$

ve $a \neq 0$ old. için bu toplam sonlu bir sayı değildir ve seri ıraksaktır.

www.ytukampus.com

örnek = $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}$

bir geometrik seridir; $a=5$ ve $r=\frac{-1}{4}$

$|r| = 1/4 < 1$ olduğu için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = \frac{5}{1-(1/4)}$ //

www.ytukampus.com

örnek = $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_1 = 1 - 1/2$$
$$S_2 = 1 - 1/2 + 1/2 - 1/3$$
$$\vdots$$
$$S_n = 1 - 1/2 + 1/2 - 1/3 + \ldots + 1/n - 1/(n+1)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

Iraksaklık Testi

* Teorem = $\lim_{n\to\infty} a_n$ yoksa veya $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksaktır.

örnek = $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \ldots$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ ıraksaktır.

* Teorem = $\sum a_n = A$ ve $\sum b_n = B$, iki yakınsak seri olsun.

(i) $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A \mp B$

(ii) $\sum k . a_n = k \sum a_n = k . A$ (k bir reel sayı)

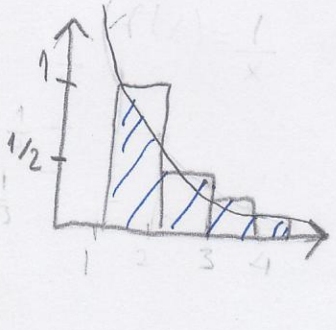
* Teorem = $\sum a_n$ yakınsak ve $\sum b_n$ ıraksak olsun.

(i) $\sum (a \mp b_n)$ ıraksak olur.

(ii) $\sum k . b_n$ ıraksak olur, $k \neq 0$

11.3 Integral Testi

örnek = $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \text{ (Harmonik Seri)}$$



$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \gg \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to\infty} \left[\int_1^{c} \frac{1}{x}\,dx \right] = \lim_{c\to\infty} \left[\ln x \Big|_{x=1}^{x=c} \right]$$

$$= \lim_{c\to\infty} \left[\ln c - 0 \right]$$

www.ytukampus.com

Integral Testi

$\{a_n\}$ pozitif terimli bir dizi olsun.

Her $n \geq N$, $a_n = f(n)$ olsun.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu

(i) sürekli

(ii) pozitif

(iii) azalan ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ve $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, ya ikisi de ıraksaktır, ya da ikisi de yakınsaktır.

* Tanım = $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisine p serisi denir. Eğer $p \leq 1$ ise seri ıraksak, eğer $p > 1$ ise seri yakınsaktır.

→ İspat = $p > 1$ kabul edelim.

$f(x) = \frac{1}{x^p}$ olsun. $a_n = f(n)$ $n \geq 1$

$\frac{1}{n^p} = \frac{1}{x}$ $f(x)$ sürekli, pozitif azalandır $x \geq 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{c\to\infty}\left[\int_1^{c} x^{-p}\,dx\right]$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_{x=1}^{x=c}\right] = \lim_{c\to\infty}\left[\frac{c^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right] = \frac{1}{-1+p}$$

Böylece $\int \frac{1}{x^p}\,dx$ yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ yakınsaktır.

www.ytukampus.com

Karşılaştırma Testleri =

Teorem = $\sum c_n$, $\sum a_n$, $\sum d_n$ serileri negatif terim içermeyen seriler olsun.

Her $n \geq N$, $c_n \leq a_n \leq d_n$ olsun.

(i) Eğer $\sum c_n$ ıraksak ise, $\sum a_n$ ıraksaktır.

(ii) Eğer $\sum d_n$ yakınsak ise, $\sum a_n$ yakınsaktır.

örnek = $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$

$$a_n = \frac{5}{5n-1} = \frac{1}{n-1/5} \geq \underbrace{\frac{1}{n} = c_n}$$

$\sum \frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksaktır.

Böylece daha büyük olan $\sum \frac{1}{n-\frac{1}{5}}$ ıraksaktır.

örnek = $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1/5} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Karşılaştırma testi uygulayamayız.

Limit Karşılaştırma Testi:

Her $n \geq N$, $a_n > 0$, $b_n > 0$ olsun.

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ ise $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ ikisi de yakınsaktır veya ikisi de ıraksaktır.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ise ve $\sum b_n$ yakınsak ise, $\sum a_n$ yakınsaktır.

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ise ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

Karsılastırma Testleri:

Teorem: $\sum c_n$, $\sum a_n$, $\sum d_n$ serileri negatif terim içermeyen seriler olsun.

Her $n \geq N$, $c_n \leq a_n \leq d_n$ olsun.

(i) Eğer $\sum c_n$ ıraksak ise, $\sum a_n$ ıraksaktır.

(ii) Eğer $\sum d_n$ yakınsak ise, $\sum a_n$ yakınsaktır.

örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$

$$a_n = \frac{5}{5n-1} = \frac{1}{n-1/5} \geq \underbrace{\frac{1}{n}}_{} = c_n$$

$\sum \frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksaktır.

Böylece daha büyük olan $\sum \frac{1}{n-\frac{1}{5}}$ ıraksaktır.

örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1/5} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Karsılastırma testi uygulayamayız.

Limit Karsılastırma Testi:

Her $n \geq N$, $a_n > 0$, $b_n > 0$ olsun.

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ ise $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ ikisi de yakınsaktır veya ikisi de ıraksaktır.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ise ve $\sum b_n$ yakınsak ise, $\sum a_n$ yakınsaktır.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ise ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

örnek $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ $\qquad a_n = \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ ve $b_n = \frac{\ln n}{n}$

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \geqslant \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ olduğu $\longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^{3/2}}}{\frac{\ln n}{n}}$

için $\sum \frac{\ln n}{n}$ ıraksaktır

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = 0$ //

$\sum \frac{\ln n}{n}$ ile limit karşılaştırma testi yapılamaz.

Kök ve Oran Testi

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri olsun.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ olsun.

(i) $\rho < 1$ ise, seri yakınsaktır.

(ii) $\rho > 1$ ise, seri ıraksaktır.

(iii) $\rho = 1$ ise, test sonuçsuzdur.

örnek $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!.n!}$

$a_n = \frac{(2n)!}{n!.n!}$ $\qquad a_{n+1} = \frac{[2.(n+1)]!}{(n+1)!.(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!.(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!.n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = 4 //$$

seri ıraksaktır.

Kök Testi

$\sum a_n$ serisi, $a_n \geq 0$ her $n \geq N$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = p$$

(i) $p < 1$ ise, seri yakınsaktır.

(ii) $p > 1$ ise, seri ıraksaktır.

(iii) $p = 1$ ise, sonuç vermez.

örnek= $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{2^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Kök testinden seri yakınsaktır.

Ders notunun devamına www.ytukampus.com/ders-notlari sayfasından ulaşabilirsiniz.