POZİTİF SERİLER İÇİN YAKINSAKLIK TESTLERİ

1 İntegral Testi:

İntegral testi; pozitif terimli bir serinin, ona benzer şekilde davranan bir improper integralle karşılaştırmak suretiyle, yakınsak veya ıraksak olup olmadığını belirlememize yardımcı olur.

Teorem: f fonksiyonu, bir pozitif N tamsayısı için, $[N,\infty)$ aralığında pozitif, sürekli ve azalan bir fonksiyon olmak üzere $a_n = f(n)$ olsun. O zaman:

$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ ve $\int_N^{\infty} f(t)\,dt$ nin her ikisi ya yakınsaktır ya da $+\infty$'a ıraksar.

NOT: f, $[N,\infty)$ da pozitif, sürekli ve azalan bir fonk. ise ve $a_n = f(n)$ ise Teorem bize $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ ve $\int_N^{\infty} f(t)\,dt$ nin her ikisinin ya yakınsadığını ya da $+\infty$'a ıraksadığını garanti eder. Fakat bize serinin toplamının integralin değerine eşit olduğunu söylemez!!

(*) Harmonik serinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Harmonik Seri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisidir.

$f(x) = \frac{1}{x}$ olsun. f, $[1,\infty)$ da sürekli, pozitif ve azalandır $\left(f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0\right)$

Yani integral testi kullanılabilir.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} (\ln R - \underbrace{\ln 1}_{0}) = +\infty$$ → improper integral ıraksatır

O halde integral testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi de ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ olsun. f, $[1,\infty)$ da sürekli, pozitif ve azalandır.
$\left(f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}<0\right)$

Dolayısıyla integral testi kullanılabilirdir.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{R\to\infty}\int_1^{R}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{R\to\infty}\operatorname{Arctan}x\Big|_1^R=\lim_{R\to\infty}\underbrace{\operatorname{Arctan}R}_{\pi/2}-\underbrace{\operatorname{Arctan}1}_{\pi/4}=\frac{\pi}{4}$$

İmproper integral yakınsaktır. İntegral testine göre seri de yakınsaktır.

② Mukayese Testi:

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$, terimleri negatif olmayan iki seri olsun.

a) Eğer her n için $a_n \le b_n$ ise ve $\sum b_n$ serisi yakınsak ise, $\sum a_n$ serisi de yakınsaktır.

$$a_n \le b_n \Rightarrow \sum a_n \le \underbrace{\sum b_n}_{\text{Yakınsak}}$$

Yakınsak

b) Eğer her n için $a_n \ge b_n$ ve $\sum b_n$ serisi ıraksak ise $\sum a_n$ serisi de ıraksaktır.

$$a_n \ge b_n \Rightarrow \sum a_n \ge \underbrace{\sum b_n}_{\text{ıraksak}}$$

ıraksak

★ **p-Serisi:** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\dots$ serisine p serisi denir.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ → $p>1$ ise seri yakınsaktır.
→ $p\le 1$ ise seri ıraksaktır.

* Mukayese testi için genel olarak seçilen seri ya geometrik seri, ya harmonik seri ya da p-serisidir.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\frac{3n+1}{n^3+1} = \frac{3n}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+1} < \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{4}{n^2}$$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1} < \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}}_{\substack{p\text{-serisi} \\ p=2>1 \\ \text{yakınsaktır}}}$$

$\Rightarrow \sum \frac{4}{n^2}$ yakınsak olduğundan Mukayese testine göre $\sum \frac{3n+1}{n^3+1}$ de yakınsaktır.

⊛ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ serisinin karakterini inceleyin.

$\boxed{\text{* } n=1,2,3,\dots \text{ için } \ln n < n \text{ dir } (n<e^n \Rightarrow \ln n < n)}$

Her $n \geq 2$ için $\ln n < n$ dir.

$$\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{Harmonik seri, ıraksaktır.}}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan mukayese testine göre $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ de ıraksaktır.

③ Limit Testi:

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$, pozitif terimli iki seri olmak üzere

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ olsun.

a) $L \neq 0, \infty$ ise her iki seri de aynı karakterlidir.

b) $L = 0$ ve $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ yakınsaktır.

c) $L = \infty$ ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisini seçelim. $p = \frac{1}{2} < 1$ seri ıraksaktır.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow$ iki seri aynı karakterli.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksak olduğundan

Limit Testine göre $\sum \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

de ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ($p = 3 > 1$ yakınsak) serisini seçelim.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^3}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}_{1}\right]^3 = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow$ Limit Testine göre iki seri aynı karakterli

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$ de yakınsaktır.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Harmonik seri, ıraksaktır) serisini seçelim.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{(n+1)^2} = 2 \neq 0, \infty$ ⟹ Limit Testine göre iki seri aynı karakterli

$\sum \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ de ıraksaktır.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \sqrt{n}}$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}}_{\text{Geometrik seri}}$ $a = \frac{1}{e}$

$r = \frac{1}{e} < 1$ yakınsak seri

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{e^n \cdot \sqrt{n}}}{\frac{1}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ⟹ Limit Testine göre $\sum \frac{1}{e^n}$ yakınsak olduğundan $\sum \frac{1}{e^n \sqrt{n}}$ de yakınsaktır.

---

④ Oran Testi:

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri ve $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ olsun.

a) $L < 1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsaktır

b) $L > 1$ " " " ıraksaktır

c) $L = 1$ ise bu test sonuç vermez. Başka test denenmeli.

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n}{n!}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{99^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{99^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{99^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{99^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{99}{n+1}$$

$= 0 < 1 \Rightarrow$ Oran Testine göre seri yakınsaktır.

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ serisinin karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{\frac{n}{n+1}}{1} = 2 > 1 \Rightarrow$$ Oran Testine göre ıraksak

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{(n+1)^n}{\cancel{(n+1)^{n+1}}}}{\underset{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)!}}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$= e > 1 \Rightarrow$ Oran Testine göre ıraksaktır

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{(n+1)^2}{n^2}}{1} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$$ Oran T. göre yakınsak

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)(2n+1).\cancel{(2n)!}}{(2n+2)!}}{\underbrace{\cancel{(n+1)!}}_{n+1}\underbrace{\cancel{(n+1)!}}_{n+1}} \cdot \frac{\cancel{n!}\,\cancel{n!}}{\cancel{(2n)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2).(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 > 1 \Rightarrow$$ Oran T. göre seri ıraksak.

5 Kök Testi

$\sum a_n$, terimleri negatif olmayan bir seri ve

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ olsun.

a) $L < 1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

b) $L > 1$ ise " " ıraksaktır.

c) $L = 1$ ise bu test sonuç vermez. Başka test denenmeli.

(*) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$ karakteri?

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{(\ln k)^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0 < 1 \Rightarrow$$ Kök testine göre seri yakınsak

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{n+1}{n}}}{n} = 0 < 1 \Rightarrow$$ Kök T. göre seri yakınsaktır

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n\left(1+\frac{5}{2^n}\right)}}{3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\sqrt[n]{1+\frac{5}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot\Big(1+\underbrace{\frac{5}{2^n}}_{0}\Big)^{\overbrace{1/n}^{0}} = \frac{2}{3}<1$$

$\downarrow$

Kök T. göre seri yakınsak

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{2/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\big(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1}\big)^2} = 2>1$$

Kök T. göre ıraksak

6 n. Terim Testi:

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise. $\sum a_n$ ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n} = 1 \Rightarrow \text{Test Sonuç vermez}$$

n. Terim testini kullanırsak:

$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0$ olduğundan seri ıraksaktır.