ALTERNE SERİLER

Terimlerinin bir kısmı negatif bir kısmı ise pozitif sayılardan oluşan serilere "değişik işaretli seri" denir.

✱ Özel olarak; serinin terimleri sırasıyla bir pozitif bir negatif olan seriye "alterne seri" denir. Genel olarak bir alterne seri; $\forall n=1,2,3,\ldots$ için $a_n>0$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$$ şeklindedir.

✱ Alterne Seri Testi

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ alterne seri olsun.

① $a_n>0$ ($\forall n=1,2,3,\ldots$ için)

② $a_{n+1}\leq a_n$ ($\forall n=1,2,3,\ldots$ için)

③ $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

şartları sağlanıyorsa alterne seri yakınsaktır.

✱ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^2+1}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

① $a_n=\frac{1}{n^2+1}>0$ ($\forall n=1,2,3,\ldots$ için) ✓

② $\frac{1}{(n+1)^2+1}<\frac{1}{n^2+1} \Rightarrow a_{n+1}<a_n$ ✓

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$ ✓

3 şart da sağlandığından Alterne Seri Testine göre seri yakınsaktır.

Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık

- Pozitif Terimli Seri
  - Yakınsak
  - Iraksak

- Alterne Seri
  - Yakınsak
    - Mutlak Yakınsak
    - Şartlı Yakınsak
  - Iraksak

Mutlak Yakınsaklık:

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin "mutlak yakınsak" olduğu söylenir.

☆ Mutlak yakınsak bir seri yakınsaktır.

Şartlı Yakınsaklık:

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ancak mutlak yakınsak değilse o zaman $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin "şartlı yakınsak" olduğu söylenir.

NOT 1: Pozitif terimli serilerdeki testler (integral, limit, oran, ...) mutlak yakınsaklığı test etmek için kullanılır. Bu testler $\sum |a_n|$ serisine uygulanmalıdır. ☆

NOT 2: Mutlak olmayan yakınsaklığı göstermek için "Alterne Seri Testi" kullanılır. ☆

Alterne Harmonik Seri: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ serisine alterne harmonik seri denir.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ alterne harmonik serisinin yakınsaklığını inceleyip türünü belirtiniz.

① $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ mutlak yakınsak mı? $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ yakınsak mı?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi harmonik seridir ve ıraksaktır. O halde

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ mutlak yakınsak değildir.

② $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ şartlı yakınsak mı? Alterne Seri Testi uygulayalım.

a) $a_n = \frac{1}{n} > 0$ ✓

b) $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ ✓

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓

Seri yakınsaktır. Ancak mutlak yakınsak değildir. O halde Şartlı Yakınsaktır.

(**) Alterne Harmonik Seri şartlı yakınsak bir seridir.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cos n\pi}{2^n}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cos n\pi}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{2^n}$

① Mutlak yakınsak mı?

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ yakınsak mı? Oran Testini kullanalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

Oran Testine göre $\sum \frac{n}{2^n}$ yakınsaktır.

O halde $\sum (-1)^n \frac{n}{2^n}$ mutlak yakınsaktır.

$\circledast$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n}$ mutlak / şartlı yakınsak mı?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

① $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$ mutlak yakınsak mı? $\Rightarrow \sum \frac{1}{\ln n}$ yakınsak mı?

Mukayese testini kullanalım.

$$\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{Harmonik seri ıraksak}}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ de ıraksaktır. (Mukayese Testine göre). O halde $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ mutlak yak. değildir.

② $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ şartlı yakınsak mı?

a) $a_n = \frac{1}{\ln n} > 0$ ✓

b) $\frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n} \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ ✓

c) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ ✓

Alterne seri testine göre seri yakınsaktır. Ancak mutlak yakınsak olmadığından şartlı yakınsaktır.

$\circledast$ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 . \ln k}$ serisinin yakınsaklık türünü belirleyiniz.

① Mutlak yakınsak mı? $\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ yakınsak mı?

Limit Testini kullanalım. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ($p=2>1$ yakınsak) serisini seçelim.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{k^2 \ln k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\ln k} = 0 \Rightarrow$$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ yakınsak olduğundan limit testine göre $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ serisi de yakınsaktır.

O halde $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 \ln k}$ mutlak yakınsaktır.

Serilerde Terimlerin Yeniden Düzenlenmesi (Sıralanması)

Mutlak ve şartlı yakınsak seriler arasındaki temel fark; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi mutlak olarak yakınsak ise o zaman yakınsar. Eğer seriyi yakınsak yapmak için kısaltmalar yapmak gerekiyorsa seri sadece şartlı olarak yakınsar.

☆ Eğer bir seri mutlak yakınsak ise: o zaman pozitif terimlerden oluşan alt seri ve negatif terimlerden oluşan alt serinin herbiri sonlu bir toplama yakınsamalıdır.

☆ Eğer bir seri şartlı yakınsak ise: pozitif ve negatif terimlerden oluşan alt serilerin her ikisi de ıraksar; sırasıyla $+\infty$ ve $-\infty$'a.

Soru: Eğer verilen yakınsak bir serinin terimlerini farklı bir sıralamayla toplanacak şekilde yeniden düzenlersek, bu yeni düzenlenmiş seri yakınsar mı? Eğer yakınsarsa verilen orjinal serinin toplamına mı yakınsar?

Cevap orjinal serinin mutlak veya şartlı yakınsak olup olmadığına bağlıdır.

Bir Dizinin Yeniden Sıralanması ve Yakınsaklığı

a) Eğer mutlak yakınsak bir serinin terimleri farklı bir olacak şekilde yeniden düzenlenirse, bu yeni düzenlenmiş seri orjinal serinin yakınsadığı toplama yakınsar.

b) Eğer bir seri şartlı olarak yakınsaksa ve eğer L herhangi bir reel sayı ise; o zaman serinin terimleri L toplamına (şartlı olarak) yakınsayacak şekilde yeniden düzenlenebilir. Aynı terimler toplamı $+\infty$ veya $-\infty$'a ıraksayacak şekilde ya da sadece ıraksayacak şekilde sıralanabilir.

Testlerin Özeti

① n. Terim Testi: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

② Geometrik Seri: $|r|<1$ ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$ geo. serisi yakınsar; değilse ıraksar.

③ p-Serisi: $p>1$ ise $\sum \frac{1}{n^p}$ serisi yakınsaktır, değilse ıraksaktır.

④ Pozitif Terimli Seriler: İntegral Testi, Oran Testi, Kök Testi, Mukayese Testi, Limit Testi kullanılarak bu serilerin yakınsaklığı incelenir. Mukayese ve Limit Testi için yakınsaklığı / ıraksaklığı bilinen (geo. seri, p-serisi v.b.) seriler seçilir.

⑤ Alterne Seriler: Alterne seri testi koşullarını sağlayan seri yakınsaktır. Bu yakınsaklık iki tür olabilir.

a) Mutlak yakınsaklık: $\sum |a_n|$ yakınsak ise $\sum a_n$ mutlak yak.

b) Şartlı yakınsaklık: $\sum a_n$ yakınsak ancak mutlak yakınsak değilse böyle yakınsaklığa şartlı yakınsaklık denir.

Pozitif Terimli Seri
- ↙ Yakınsak
- ↘ Iraksak

Alterne Seri
- ↙ Yakınsak
  - ↙ Mutlak Yak.
  - ↘ Şartlı Yak.
- ↘ Iraksak