KUVVET SERİLERİ

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$ şeklindeki seriye "$x=c$ kuvvetlerinin kuvvet serisi" veya "$x=c$ civarında bir kuvvet serisi" denir.

★ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sabitleri kuvvet serisinin katsayılarıdır.

★★ Kuvvet serisinin terimleri bir x değişkeninin fonksiyonu olduğundan, seri x in her bir değeri için yakınsayabilir veya ıraksayabilir. Serinin yakınsak olduğu değerler için toplam x'e bağlı bir fonksiyon tanımlar.

★ c noktası $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık merkezidir. Seri, $x=c$ de a_0'a yakınsar.

Teorem: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ kuvvet serisi için aşağıdakilerden biri sağlanır:

a) Seri sadece $x=c$ de yakınsaktır.

b) Seri her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır.

c) Seri, $|x-c|<R$ eşitsizliğini sağlayan her x'de yakınsak, $|x-c|>R$ yi sağlayan her x'de ıraksayacak şekilde bir R reel sayısı olabilir. Bu durumda seri $x=c+R$ ve $x=c-R$ uç noktalarında yakınsayabilir veya ıraksayabilir.

★ Kuvvet serisinin yakınsak olduğu aralığa (noktaya) $[c,c]$ yakınsaklık aralığı denir.

(c) deki R sayısına yakınsaklık yarıçapı denir. (a) durumunda yakınsaklık yarıçapının $R=0$ olduğunu söyleriz. (b) de $R=\infty$ olur.

* Yakınsaklık yarıçapı R, yakınsaklık merkezi c olan kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı:

$[c-R, c+R]$, $[c-R, c+R)$, $(c-R, c+R]$, $(c-R, c+R)$ aralıklarından biri olabilir.

Bir Kuvvet Serisinin Yakınsaklığını Test Etmek

① Oran Testi kullanılarak serinin mutlak yakınsadığı bir aralık bulunur.

$$|x-c|<R \Rightarrow c-R<x<c+R$$

② Mutlak yakınsaklık aralığı sonlu ise uç noktalarda yakınsaklık / ıraksaklık incelemesi yapılır.

③ Yakınsaklık aralığı dışında kalan noktalarda seri ıraksaktır.

* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hangi x değerleri için yakınsar?

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$$

Seri her $x \in \mathbb{R}$ için mutlak yakınsar.

* $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ hangi x değerleri için yakınsar?

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|.(n+1) = \infty \quad (x \neq 0 \text{ için})$$

Seri sadece merkezinde yani $x=0$ da yakınsar.

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ serisinin mutlak yakınsak, şartlı yakınsak, ıraksak olduğu x değerleri?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| . \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{1} = |x| < 1$$

$|x|<1$ için seri mutlak yakınsaktır. $\boxed{-1<x<1}$ M.Yak.

$x=-1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow$ Alterne Harmonik Seri
şartlı yakınsaktır.

$x=1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$ Harmonik Seri ıraksaktır.

Sonuç:
$x \in (-1,1)$ de seri mutlak yakınsak
$x=-1$ de seri şartlı yakınsak
} Yakınsaklık Aralığı $[-1,1)$

$\mathbb{R} - [-1,1)$ de seri ıraksaktır.

---

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$ serisinin mutlak yak., şartlı yak., ıraksak olduğu x değerlerini ve yakınsaklık aralığını inceleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+3}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+3}}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| . \underbrace{\frac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{(n+1)^2+3}}}_{1} = |x| < 1 \Rightarrow \boxed{-1<x<1}$$

Mutlak Yak.

* $x=+1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ serisi elde edilir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisini seçelim. Iraksaktır $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3}} = 1 \neq 0, \infty$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli.
$\sum \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ de ıraksaktır.

* $x=-1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ elde edilir.

Mutlak Yak. değildir. Şartlı yakınsak mı?

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} > 0$ ✓ $\quad a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+3}} < a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ ✓ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} = 0$ ✓

Alterne seri testine göre $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ şartlı yakınsaktır.

<u>Sonuç:</u>

Mutlak Yakınsaklık Aralığı: $(-1,1)$
Şartlı Yakınsaklık: $x=-1$

$\Big\}\ [-1,1) \to$ Yakınsaklık aralığı

$\mathbb{R}-[-1,1)$ de seri ıraksaktır.

---

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)\,3^n}$ serisinin merkezini, mutlak yak./şartlı yak. olduğu x değerlerini, yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(2x+5)^{n+1}}{((n+1)^2+1)\,3^{n+1}}}{\frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)\,3^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} |2x+5| \cdot \underbrace{\frac{n^2+1}{((n+1)^2+1)}}_{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{|2x+5|}{3} < 1$$

$|2x+5| < 3 \Rightarrow -3 < 2x+5 < 3 \Rightarrow \boxed{-4 < x < -1} \Rightarrow$ Mutlak Yak. Aralığı

* $x=-1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ olur.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ için

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($p>2$ yakınsak) serisini seçelim.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0, \infty \to$ Limit Testine göre iki seri aynı karakterli. O halde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ de yakınsak.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \Rightarrow$ Yak. $\Rightarrow \boxed{x=-1}$ Mut. Yak.

* $x=-4$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ olur.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ mutlak yak.

Sonuç:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Mutlak Yak.}: [-4,-1] \\ \text{Şartlı Yak.}: - \end{array}\right\} [-4,-1] \text{ yakınsaklık aralığı}$$

$\mathbb{R}-[-4,-1]$'de seri ıraksaktır.

Kuvvet Serilerinde İşlemler

① Yakınsama aralıklarının kesişiminde iki kuvvet serisi tıpkı sabit terimli serilerdeki gibi terim terim eklenip çıkarılabilir.

$$\left.\begin{array}{ll} A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n & |x-c|<R \\ B(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n & |x-c|<R \end{array}\right\} A(x)+B(x)=\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(x-c)^n \quad |x-c|<R$$

---

② Kuvvet Serileri İçin Çarpım Teoremi:

Eğer $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $|x|<R$ aralığında mutlak yakınsak iki seri ise ve

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ olarak verilirse

o zaman, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ serisi $|x|<R$ aralığında $A(x).B(x)$'e yakınsar.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = A(x).B(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$$

c_n genel katsayısını bulmak zordur ve çoğu zaman genel bir formül de bulunamayabilir. Bu gibi durumlarda çarpım serisinin ilk birkaç terimini elde etmek yeterlidir.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = ?$$

$$(1+x+x^2+\dots) \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right) + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \dots\right)$$

$$+ \left(x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{2} \dots\right) + \dots$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + \dots$$

---

3) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = f(x)$, $(c-R < x < c+R)$

serisini bir α sabitiyle çarparsak, oluşan

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n (x-c)^n = \alpha f(x)$ serisi de $c-R<x<c+R$ aralığında

yakınsaktır.

★ Bir kuvvet serisi yakınsadığı aralıkta bir $f(x)$ fonksiyonu tanımlar.

★★ NOT: ★★ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$ dir.

İspat:

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \Rightarrow$ Geometrik Seri $\quad a=1, \ r=x$

Bu seri $|r| = |x| < 1$ için $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$ e yakınsar.

Dolayısıyla $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1<x<1)}$ dir.

4) **Teorem:** Eğer, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $|x|<R$ için mutlak yakınsak ise, o zaman her sürekli $f(x)$ fonksiyonu için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(x))^n$ serisi de $|f(x)|<R$ için yakınsar.

(*) $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve bu aralıkta yakınsadığı fonksiyonu bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$ olduğunu biliyoruz.

$x \to 4x^2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (4x^2)^n = \frac{1}{1-4x^2}$ $\quad |4x^2|<1 \to -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n} = \overbrace{\frac{1}{1-4x^2}}^{\text{yakınsadığı fonk.}} \quad \overbrace{\left(|x|<\frac{1}{2}\right)}^{\text{yakınsaklık aralığı}}$$ bulunur.

---

5) **Türev:**

Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ serisi $R>0$ yakınsaklık yarıçapına sahipse, $c-R<x<c+R$ aralığında aşağıdaki fonksiyonu tanımlar:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

Bu durumda,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.(x-c)^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)\, a_n (x-c)^{n-2}$$

dir. Bu türev serilerinden her biri $c-R<x<c+R$ de yakınsar.

⑥ Terim Terime İntegrasyon:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ serisinin $c-R<x<c+R$ için yakınsak olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} + k$$

serisi $c-R<x<c+R$ için yakınsaktır.

⊛ $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1<x<1)$ için

$f'(x)$, $f''(x)$ türev serilerini bulun.

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad (-1<x<1)$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} \quad (-1<x<1)$$

⊛ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \quad (-1<x<1)$

ise $f(x) = ?$

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \cdots \quad (-1<x<1)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} = f'(x) \quad (-1<x<1)$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\int f'(x)\,dx}_{f(x)} = \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctan}x + c \Rightarrow f(x) = \text{Arctan}x + c$$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow c=0 \qquad \Rightarrow f(x) = \text{Arctan}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(-1<x<1)$$

⊛ Aşağıdaki fonksiyonların kuvvet serisi temsillerini ve geçerli oldukları aralıkları bulunuz.

a) $\frac{1}{(1-x)^2}$ b) $\frac{1}{(1-x)^3}$ c) $\ln(1+x)$

Cevap:

$(*)\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots \quad (-1<x<1)$ olduğunu biliyoruz.

a) (*) dan türev alırsak:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad (-1<x<1)$$

b) Bir kez daha türev alırsak:

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \quad (-1<x<1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n.(n-1)}{2} x^{n-2} \quad (-1<x<1)$$

c) (*) da $x=-t$ dönüşümü yapalım.

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 \dots \quad (-1<t<1)$ olur. İntegral alırsak:

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + c \quad (-1<t<1)$$

$$t=0 \Rightarrow c=0 \Big\} \Rightarrow \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad (-1<t<1)$$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$ serisini kullanarak

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ serisinin toplamını bulunuz. Bu sonucu kullanarak

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ serisinin yakınsadığı değeri bulunuz.

Cevap:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1) \to x \text{ ile çarp}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n} = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1) \to \text{Türev al}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad (-1<x<1) \to x \text{ ile çarp}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad (-1<x<1) \checkmark$$

$x=\frac{1}{2}$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \underline{\underline{6}}$

(*) $f(x) = \frac{1}{2+x}$ için $(x-1)$ in kuvvetlerine göre olan bir seri temsilini ve yakınsaklık aralığını bulun.

$t = x-1 \Rightarrow x = t+1$ dönüşümü yapalım.

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{3+t} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{3}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{t}{3} + \frac{t^2}{3^2} - \frac{t^3}{3^3} - \cdots\right) \quad \left(-1<\frac{t}{3}<1\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{3^{n+1}} \quad (-3<t<3)$$

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}} \quad -3<x-1<3 \Rightarrow \boxed{-2<x<4}$$