Pinar Albayrak
Mat 2
1. Uygulama

⊛ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = ?$

$$\frac{4}{n^2+4n+3} = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+1} \Bigg\} \Rightarrow \boxed{A=-2 \mid B=2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$

$$S_n = 2\left[\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$$

$$S_n = 2\left[\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{5}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = \frac{5}{3}$$

⊛ $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$ serisinin toplamını bulup sonucu yorumlayın.

$$S_n = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \cdots + \ln\frac{n-1}{n}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdots\frac{\cancel{n-1}}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$$

$\Downarrow$

Seri $-\infty$'a ıraksar.

⊛ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ serisinin karakteri?

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ seçelim. $p=\frac{1}{3}<1$ ıraksak seri

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty}(1+\ln n) = \infty \Rightarrow$$

Limit Testine göre, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ıraksak olduğundan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ de ıraksaktır.

(*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 2^n}$ karakteri?

I. Yol Oran Testi ile:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2n+3}{(n+1)^2 2^{n+1}}}{\dfrac{2n+1}{n^2 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(2n+3).n^2}{(n+1)^2.(2n+1)}}_{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$$

Oran Testine göre Seri yakınsaktır.

II. Yol Limit Testi ile:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ seçelim. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $|r| = \frac{1}{2} < 1$ Geo. Seri yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2n+1}{n^2 2^n}}{\dfrac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0 \Rightarrow$$

Limit Testine göre $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yakınsak olduğundan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2.2^n}$ de yakınsaktır.

(*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3-1}$ karakteri?

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ seçelim. $p = \frac{3}{2} > 1$ yakınsak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3} - \sqrt{n^3-1}}{\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3}.\left(\sqrt{n^3} - \sqrt{n^3-1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}.\overbrace{\left(\sqrt{n^3} - \sqrt{n^3-1}\right)\left(\sqrt{n^3} + \sqrt{n^3-1}\right)}^{1}}{\sqrt{n^3} + \sqrt{n^3-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3} + \sqrt{n^3-1}} = \frac{1}{2} \neq 0, \infty$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli. Yani $\sum \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3-1}$ de yakınsaktır.

(*) $\dfrac{1+2\ln 2}{\underset{\substack{4+5\\ \uparrow\\ n=2}}{9}} + \dfrac{1+3\ln 3}{\underset{\substack{9+5\\ \uparrow\\ n=3}}{14}} + \dfrac{1+4\ln 4}{\underset{\substack{16+5\\ \uparrow\\ n=4}}{21}} + \cdots$ serisinin yakınsaklığını inceleyin.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5} = \frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \cdots$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ seçelim. Harmonik Seridir, ıraksaktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n\ln n}{n^2+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2\ln n}{n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(\overset{0}{\frac{1}{n}}+\overset{\infty}{\ln n}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\underset{0}{\frac{5}{n^2}}\right)} = \infty \Rightarrow$$

Limit Tes. göre $\sum \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan $\sum \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$ de ıraksak

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = ?$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

$a=1 \quad r=\frac{1}{2}$

$|r| = \frac{1}{2} < 1$

Toplam $= \frac{a}{1-r}$

$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

$a=1 \quad r=\frac{1}{6}$

$|r| = \frac{1}{6} < 1$

Toplam $= \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}}$

$= \frac{6}{5}$

(*) $\left\{ \frac{1}{9}, \frac{2}{12}, \frac{4}{15}, \frac{8}{18}, \frac{16}{21}, \dots \right\}$ dizisinin genel terimi?

$$\frac{2^0}{3.3} \quad \frac{2^1}{3.4} \quad \frac{2^2}{3.5} \quad \frac{2^3}{3.6} \quad \frac{2^4}{3.7}$$

1.terim, 2. terim, 3. terim, 4. terim, 5. terim

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{2^{n-1}}{3.(n+2)} \right\}$$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$f(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ olsun. $f(x)$ $[1,\infty)$ da
- → pozitiftir $(f(x)>0)$
- → Azalandır $(f'(x)<0)$
- → Süreklidir ($[1,\infty)$ da süreksizlik noktası yoktur)

integral Testi kullanılabilir

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\ln R} \frac{du}{1+u^2} = \lim_{R\to\infty} \operatorname{Arctan} u \Big|_0^{\ln R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=1 \Rightarrow u=0 \\ x=R \Rightarrow u=\ln R \end{array}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \big(\underbrace{\operatorname{Arctan}(\underbrace{\ln R}_{\infty})}_{\pi/2} - \underbrace{\operatorname{Arctan} 0}_{0}\big)$$

$= \pi/2 \Rightarrow$ improper integral yakınsak

integral Testine göre; $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ yakınsak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ serisi yakınsaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(n+1)^2}{n^2}}_{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

Oran Testine göre Seri yakınsaktır.

⊛ $\{a_n\} = \left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+1}\right\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyin.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{e^{-1}}\right]^{\frac{n^2+1}{n+1}\to\infty} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow \text{dizi yakınsak}$$

⊛ $\{a_n\} = \left\{\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{n/3}\right\}$ dizisinin yakınsaklığı?

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{n/3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{n/3} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{2n}\right]^{1/6}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{2n-3}}_{e^4}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{3}}_{1}\right]^{1/6} = (e^4)^{1/6} = e^{2/3}$$

$\downarrow$ Dizi yakınsak

⊛ $\{a_n\} = \left\{\frac{3n^2-n+1}{n-2n^2}\right\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{3}{2}$ olduğunu gösteriniz.

$\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $\left|\frac{3n^2-n+1}{n-2n^2}+\frac{3}{2}\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N tamsayısı var mı?

$$\left|\frac{3n^2-n+1}{n-2n^2}+\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{n+2}{2n(1-2n)}\right| = \frac{n+2}{2n.(2n-1)} \leq \frac{3n}{2n(2n-1)} = \frac{3}{2(2n-1)} < \varepsilon$$

$\frac{3}{2.(2n-1)} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\varepsilon}+1\right)$ bulunur.

N'i $\frac{1}{2}.\left(\frac{3}{2\varepsilon}+1\right)$ den büyük herhangi bir tamsayı olarak alırsak

$\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $|a_n - L| < \varepsilon$ şartı sağlandığından

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{3}{2}$ dir.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\sqrt{n+1} - \ln\sqrt{n}$ serisinin n. kısmi toplamı için bir formül bulunuz ve bu formül yardımıyla serinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\ln\sqrt{n} + \ln\sqrt{n+1} \Rightarrow S_n = -\overset{0}{\overline{\ln 1}} + \cancel{\ln\sqrt{2}} - \cancel{\ln\sqrt{2}} + \cancel{\ln\sqrt{3}} \dots - \cancel{\ln\sqrt{n}} + \ln\sqrt{n+1}$$

$$= \ln\sqrt{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\sqrt{n+1} = +\infty \Rightarrow \text{Seri } +\infty\text{'a ıraksar}$$

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \text{ArcCos}\frac{1}{n+1} - \text{ArcCos}\frac{1}{n+2}$ serisinin n. kısmi toplamı için bir formül bulup yakınsaklığını inceleyiniz. Yakınsak ise değerini bulunuz.

$$S_n = \text{ArcCos}\frac{1}{2} - \cancel{\text{ArcCos}\frac{1}{3}} + \cancel{\text{ArcCos}\frac{1}{3}} - \cancel{\text{ArcCos}\frac{1}{4}} + \dots + \cancel{\text{ArcCos}\frac{1}{n+1}} - \text{ArcCos}\frac{1}{n+2}$$

$$S_n = \underbrace{\text{ArcCos}\frac{1}{2}}_{\pi/3} - \text{ArcCos}\frac{1}{n+2} = \frac{\pi}{3} - \text{ArcCos}\frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{3} - \underbrace{\text{ArcCos}\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{0}}_{\pi/2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} \rightarrow \text{Seri yakınsaktır.}$$

Toplamı $-\frac{\pi}{6}$ dır.

⊛ $\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyin.

<u>I. Yol</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{e}\Big]^{1/n \to 0} = e^0 = 1 \Rightarrow \text{Dizi yakınsaktır.}$$

<u>II. Yol</u> Logaritmik limit ile de çözülebilir.

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = ?$

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} \qquad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{5}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n-2}} - \cancel{\tfrac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$$

---

*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\frac{3n^2+3n+1}{n^3.(n+1)^3} = \frac{(1+n)^3 - n^3}{n^3(1+n)^3} = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \text{ olduğundan}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \text{ dır.}$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2^3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2^3}} - \cancel{\tfrac{1}{3^3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3^3}} - \cancel{\tfrac{1}{4^3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\tfrac{1}{(n-1)^3}} - \cancel{\tfrac{1}{n^3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n^3}} - \frac{1}{(n+1)^3}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{(n+1)^3} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(1+n)^3} = \underline{\underline{1}}$$

⊛ $\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots=?$

$$\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}$$

$$\frac{n+1}{(n+2)!}=\frac{n+2-1}{(n+2)!}=\frac{n+2}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!} \text{ dir.}$$

$$S_n=\left(\frac{1}{2!}-\cancel{\frac{1}{3!}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3!}}-\cancel{\frac{1}{4!}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{(n+1)!}}-\frac{1}{(n+2)!}\right)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots=\frac{1}{2}$$

⊛ $x=2,131313\ldots=2,\overline{13}$ sayısını serileri kullanarak iki tamsayının oranı olarak ifade ediniz.

$$x=2,\overline{13}=2+\underbrace{\frac{13}{100}+\frac{13}{(100)^2}+\frac{13}{(100)^3}+\cdots}_{\text{Geometrik Seri}}=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13}{100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}$$

$a=\frac{13}{100}$ $\quad r=\frac{1}{100}$

$|r|=\frac{1}{100}<1 \Rightarrow$ seri yakınsaktır

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13}{100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{13}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{13}{99}$$

$$x=2+\frac{13}{99}=\frac{211}{99}$$

⊛ $4-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\cdots=?$ $\Rightarrow$ $a=4$ $\quad r=-\frac{1}{4}$ Geometrik Seridir

$-1/4 \quad -1/4 \quad -1/4 \quad -\frac{1}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow |r|=\frac{1}{4}<1 \text{ Seri } \frac{a}{1-r}\text{'ye yakınsar.}$$

$$\frac{a}{1-r}=\frac{4}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{16}{5} \Rightarrow 4-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\cdots=\frac{16}{5}$$

$\circledast$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}$ karakteri?

Kök testini düşünürsek:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3}}_{1} = 1 \rightarrow \text{Kök Testi Sonuç vermez} \times$$

Limit Testini düşünürsek:

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ seçelim. $p=3>1$ yakınsaktır

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n-1)^n}{n^n \cdot \cancel{n^3}}}{\frac{1}{\cancel{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0, \infty$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli. $\sum \frac{1}{n^3}$ yakınsak olduğundan $\sum \frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}$ de yakınsaktır.

$\circledast$ $\sum_{n=1}^{\infty} e^{3n} \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ karakteri?

Kök testi uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{3n} \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^3 \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} e^3 \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}_{e^2}} = e > 1$$

Kök Testine göre seri ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{(n+1)2^n}$ serisinin karakteri?

I. Yol Mukayese Testi ile:

$\forall n \geq 2$ için $\ln n < n$ dir.

$$\frac{\ln n}{(n+1)2^n} < \frac{n}{(n+1)2^n} < \frac{n}{n.2^n} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{(n+1)2^n} < \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_{\text{Yakınsak}}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{4}}_{a} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{r}^{n-1} \Rightarrow$$ Geo. Seri $|r| = \frac{1}{2} < 1$ yakınsak.

O halde Muk. Testine göre $\sum \frac{\ln n}{(n+1)2^n}$ serisi de yakınsak

II. Yol Limit Testi ile:

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ geo. serisini seçelim. $|r| = \frac{1}{2} < 1$ yakınsak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{(n+1)2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\ln n}{n+1}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 \Rightarrow$$

Limit Testine göre $\sum \frac{1}{2^n}$ yak. olduğundan $\sum \frac{\ln n}{(n+1)2^n}$ de yakınsaktır.

III. Yol Oran Testi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+2)\,2^{n+1}}}{\frac{\ln n}{(n+1).2^n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{2^n}{2^{n+1}}}_{\frac{1}{2}} \cdot \overbrace{\frac{\ln(n+1)}{\ln n}}^{1} = \boxed{\frac{1}{2}} < 1$$

∞/∞ L'Hopital $\Downarrow$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

Oran testine göre yakınsak

Pinar Albayrak

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi Vize Soru ve Cevap Kâğıdı				NOT TABLOSU				
				1. Soru	2. Soru	3. Soru	4. Soru	TOPLAM
Adı Soyadı								
Öğrenci Numarası		Grup No						
Bölümü					Sınav Tarihi		26.04.2014	
Dersin Adı	MAT1322-MAT1072 Matematik II			Sınav Süresi	60d	Sınav Yeri		
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı						İmza		

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

Soru 1. Genel terimi $a_n = n - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2n}\right)$, $(n=1,2,\dots)$, olan dizinin limitini bulunuz.

Cevap 1.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[n - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2n})\right]$$

(0.5) $$= \lim_{n\to\infty}\left[\ln(e^n) - \ln(1+e^{2n})^{1/2}\right]$$

(0.5) $$= \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{e^n}{\sqrt{1+e^{2n}}}\right)$$

(0.5) $$= \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e^{2n}}+1}}\right)$$

(0.5) $$= \ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e^{2n}}+1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{e^{2n}}+1}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{0+1}}\right) = \ln(1)$$

(0.5)

$$= 0$$

26

10

(*) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$ karakteri?

$n>3$ için $n>\ln n$ dir.

$n>\ln n \Rightarrow \ln n > \ln(\ln n) \Rightarrow n > \ln n > \ln(\ln n)$ sağlanır.

$n > \ln(\ln n) \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(\ln n)}$ $\quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksak

ve $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(\ln n)}$ olduğundan Mukayese testine göre $\sum \frac{1}{\ln(\ln n)}$ ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \, n! \, n!}{2.(2n)!}$ serisinin karakteri?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{5^{n+1}(n+1)!\,(n+1)!}{2.(2n+2)!}}{\dfrac{5^n \cdot n! \; n!}{2(2n)!}} = \frac{5.(n+1).(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{5}{4} > 1$$

Oran Testine göre Seri Iraksak

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ karakteri?

I. Yol Kök Testi:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^3} = \frac{2}{1^3} = 2 > 1$$

Seri kök testine göre ıraksaktır.

$\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\right)$

II. Yol Oran Testi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^3}}{\dfrac{2^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^3}{(n+1)^3}}_{1} . 2 = 2 > 1 \Rightarrow$$

Seri oran testine göre ıraksaktır

(*) a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\frac{9}{25}+\cdots$

b) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\cdots$

serilerinin karakterini belirleyiniz.

---

a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2}$ Limit testi için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ıraksak serisini seçelim.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{(n+1)^2}=2\neq 0,\infty$$

iki seri aynı karakterli. $\sum\frac{2n+1}{(n+1)^2}$ de ıraksak

---

b) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$ Limit testi için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ (yakınsak $(r=\frac{1}{2})$) geometrik serisini seçelim.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n(1-\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{0})}=1\neq 0,\infty$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli.

$\sum\frac{1}{2^n-1}$ de yakınsak

(*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{3/2}}$ serisi yakınsak mıdır?

Limit testi için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/4}}$ $\left(p=\frac{5}{4}>1\right)$ yakınsak serisini seçelim.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^{3/2}}}{\frac{1}{n^{5/4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{1/4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{4}.n^{-3/4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^{1/4}}=0$$

Limit Testine göre, Seçtiğimiz seri yakınsak olduğundan $\sum\frac{\ln n}{n^{3/2}}$ de yakınsaktır.

$\circledast$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ serisinin toplamını hesaplayınız.

$$S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \qquad \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \cancel{\frac{1}{2.3}}\right] + \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{1}{2.3}} + \cancel{\frac{1}{3.4}}\right] + \dots + \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{1}{n(n+1)}} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

$\circledast$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}}\right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}}_{a=1\ r=\frac{1}{2}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}}}_{a=1\ r=\frac{1}{6}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{4}{5}$$

$\circledast$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ karakteri?

$[2,\infty)$ da $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ sürekli, pozitif ✓, azalan ✓ } int. Testi uygulanabilir.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^{R} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{du}{u^2} = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\Big|_{\ln 2}^{\ln R}\right]$$

$\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\underbrace{\frac{1}{\ln R}}_{0} + \frac{1}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}$$

yakınsak

dolayısıyla integral testine göre $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ yakınsak.

$\circledast$ $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\frac{1}{n})}$ karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak serisini seçelim.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{-(1+\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{-1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1}} = 1 \neq 0, \infty$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli.

$\sum n^{-(1+\frac{1}{n})}$ ıraksak

(*) $1+\frac{1}{10}+\frac{1.2}{10^2}+\frac{1.2.3}{10^3}+\cdots$ serisinin karakterini belirtiniz.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty>1$

olduğundan Oran testine göre seri ıraksaktır.

(*) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$ Oran testine göre seri yakınsak

---

(*) Genel terimi $a_n=\frac{1}{2^n}\cdot\operatorname{Tan}\frac{\pi}{2^n}$ olan serinin karakterini inceleyiniz.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\operatorname{Tan}\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}\cdot\operatorname{Tan}\frac{\pi}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\frac{\operatorname{Tan}\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}}^{1}}{\underbrace{\frac{\operatorname{Tan}\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}}_{1}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}<1$$

Seri Yakınsak (Oran Testine göre)

(*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+1}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{n^{-7/6}}_{b_n}$ serisini seçelim. $p=\frac{7}{6}>1$ seri yakınsak.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+1}}\cdot n^{7/6}=1\neq 0,\infty$ Limit Testine göre iki seri aynı karakterli

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+1}}$ yakınsak.

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi, 1. Vize Sınav Soru ve Cevap Kağıdı				NOT TABLOSU						
				1. S	2. S	3. S	4. S			TOPLAM
Adı Soyadı										
Öğrenci Numarası		Grup No								
Bölümü					Sınav Tarihi			02/04/2016		
Dersin Adı	MAT1072 MATEMATİK II			Sınav Süresi	100 dk		Sınav Yeri			
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı						İmza				

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

Soru 1. a) Ardışık olarak, $a_1 = \frac{1}{2}$ ve $n \geq 1$ doğal sayısı için $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} - 1$ ile verilen $\{a_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ olduğu bilindiğine göre $\left\{\frac{a_{n+1}-1}{a_n - 1}\right\}$ dizisinin limitini bulunuz. *(7puan)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-1}{a_n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3+a_n}-2}{a_n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{3+a_n}-2)(\sqrt{3+a_n}+2)}{(a_n-1)(\sqrt{3+a_n}+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(a_n-1)}}{\cancel{(a_n-1)}(\sqrt{3+a_n}+2)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n} = e^{a}$$

b) Aşağıdaki serilerin yakınsak veya ıraksak olup olmadıklarını belirleyiniz. *(9+9 puan)*

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

i) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$$

$$= e^{-1}\cdot 1 = \frac{1}{e} < 1 \text{ old. YAK.}$$

(Kök Testine göre)

ii) $b_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

Limit karşılaştırma testinden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksaktır.

(her iki seri aynı karakterde)

Başarılar dilerim.

15

Soru 3. a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^{-n}}{\cos(n\pi)}$ serisinin toplamını bulunuz.***(10puan)***

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^{-n}}{\cos(n\pi)} = 1-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi^3}+\cdots+(-1)^n\pi^{-n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{\pi}\right)^n \quad 2$$

1 1

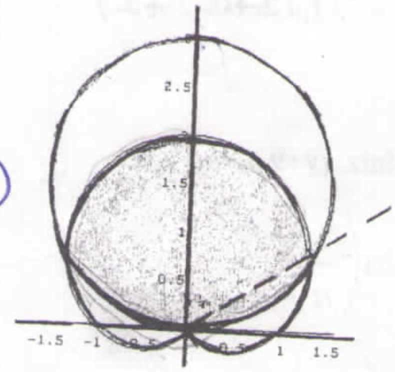
geometrik seridir. Burada $a=1$ $r=-\frac{1}{\pi}$ dir.

4 2 $|r|<1$ olduğundan serinin toplamı

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{\pi}\right)}=\frac{\pi}{\pi+1}$$

2 2

b) $r=3\sin\theta$ *ve* $r=1+\sin\theta$ eğrilerinin sınırladığı ortak bölgenin alanını (belirli integral ile) hesaplayınız. (Şekil çizilecektir) ***(15puan)***

3 

$$3\sin\theta=1+\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{2} \quad \theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}(3\sin\theta)^2\,d\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}(1+\sin\theta)^2\,d\theta$$

3 1

$$A=\frac{9}{2}\int_0^{\pi/6}(1-\cos 2\theta)\,d\theta+\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(1+2\sin\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

2 2

$$A=\frac{9}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/6}\right]+\left[\theta-2\cos\theta+\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}\right]$$

$$A=\frac{9}{2}\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]+\left[\frac{3\pi}{4}-\frac{3\pi}{12}+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}+2\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad 2$$

$$A=\frac{5\pi}{4}\ \text{br}^2$$

16

(*) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n} a_n$ olarak verilen $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ mutlak yakınsak mı? $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak mı?

Oran Testine göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1+\ln n}{n}}_{\infty/\infty \xrightarrow{L'Hop.}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 < 1$$ yakınsaktır.

O halde $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ serisi mutlak yakınsaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{1+n^2}$ karakteri?

$$\frac{1+\cos n}{1+n^2} \le \frac{2}{1+n^2} < \frac{2}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{1+n^2} < \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}}_{p=2>1 \text{ yak.}}$$

$\Rightarrow$ Mukayese Testine göre $\sum \frac{1+\cos n}{1+n^2}$ de yak.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(e^n+n)^n}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(e^n+n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(\sqrt[n]{n})^2}^{1}}{\underbrace{e^n+n}_{\infty}} = 0 < 1$$ $\Rightarrow$ Kök Testine göre seri yakınsak

---

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}+1}$ karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($p=2>1$ yak.) serisini seçelim.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{e^{n^2}+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^3}{e^{n^2}+1}}_{\infty/\infty \xrightarrow{L'Hopital}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{3n^{\cancel{2}}}{2\cancel{n}e^{n^2}}}_{\infty/\infty \xrightarrow{L'Hopital}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4n e^{n^2}} = 0 \Rightarrow$$

Limit Testine göre $\sum \frac{1}{n^2}$ yak. olduğundan $\sum \frac{n}{e^{n^2}+1}$ de yak.

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi, Sınav Soru ve Cevap Kağıdı			NOT TABLOSU				
			1a	1b	2a	2b	TOPLAM
Adı Soyadı							
Öğrenci Numarası		Grup No					
Bölümü					Sınav Tarihi	28/04/2012	
Dersin Adı	0251312 Matematik II 1. Değerlendirme	Sınav Süresi	90 dk	Sınav Yeri			
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı			İmza				

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

SORU 1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ seçelim, $p=\frac{1}{3}<1$ (p-serisi) olduğundan seçilen seri ıraksak. Limit ~~mukayese~~ testine göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}+n^{5/3}}{2+n^{5/3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^{5/3}}\left(\cancelto{0}{\frac{1}{n^{4/3}}}+1\right)}{\cancel{n^{5/3}}\left(\cancelto{0}{\frac{2}{n^{5/3}}}+1\right)} = 1$$

olduğundan her iki seri aynı karakterde yani $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$ serisi de ıraksak.

b) Genel terimi $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^n$ olan $\{a_n\}$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^{3n+2-2}\right]^{1/3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^{3n+2} \cdot \left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^{-2}\right]^{1/3}$$

$$= \left(e^{-3} \cdot 1\right)^{1/3} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

15

✱ $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{1+(a_n)^2}{2}$ olarak tanımlanan $\{a_n\}$ dizisi için

a) $\{a_n\}$ in artan olduğunu
b) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_n<1$ olduğunu } gösteriniz.

c) $\{a_n\}$ in yakınsaklığını inceleyip varsa limitini bulunuz.

a) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_n<a_{n+1}$ olduğunu göstermeliyiz.
Tümevarımı kullanırsak ($n=1$ için doğru olduğunu gösterip; $n-1$ için doğru olduğunu kabul edip, n için doğru olduğunu göstermeliyiz)

① ($n=1$ için) $a_1<a_2$ mi? $a_1=\frac{1}{2}$ $a_2=\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}=\frac{5}{8}$ $\Rightarrow$ $a_1<a_2$ ✓ ($n=1$ için doğru)

② $n=n-1$ için doğru olsun. Yani $a_{n-1}<a_n$ olsun.

③ n için doğru olduğunu gösterelim. Yani $a_{n+1}>a_n$ old. gösterelim.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1+(a_n)^2}{2}-\frac{1+(a_{n-1})^2}{2}=\frac{(a_n)^2-(a_{n-1})^2}{2}>0$$

$\to >0$'dır (çünkü $a_{n-1}<a_n$ kabul ettik)

O halde $\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_n<a_{n+1}$ dir. Dizi artandır.

---

b) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_n<1$ old. gösterelim. Tümevarım ile:

① $a_1=\frac{1}{2}<1$ ✓ ② $a_{n-1}<1$ olsun.

③ $a_n<1$? mi?

$$a_n-1=\frac{1+(a_{n-1})^2}{2}-1=\frac{(a_{n-1})^2-1}{2}<0$$ (Çünkü $a_{n-1}<1$ kabul ettik)

O halde $a_n<1$ dir ($\forall n\in\mathbb{N}$ için). Yani dizinin üst sınırı 1'dir.

---

c) Dizi üstten sınırlı ve artan olduğundan yakınsaktır.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=L$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(a_n)^2}{2} \Rightarrow L=\frac{1+L^2}{2} \Rightarrow L^2-2L+1=0 \Rightarrow (L-1)^2=0$$

$\boxed{L=1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$ dir.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} n.e^{-n^2}$ serisinin yakınsak olduğunu integral testi ile gösteriniz.

$f(x)=\frac{x}{e^{x^2}}$ $[1,\infty)$ $\to$ $f(x)$, $[1,\infty)$ da pozitiftir

$\to$ $f(x)$, $[1,\infty)$ da süreklidir.

$\to$ $f'(x)=\frac{e^{x^2}-2x^2e^{x^2}}{e^{2x^2}}=\frac{1-2x^2}{e^{x^2}}<0 \Rightarrow$ $f(x)$ $[1,\infty)$ da azalandır.

integral testi uygulanabilir.

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{e^{x^2}}dx=\lim_{R\to\infty}\int_1^{R}\frac{x}{e^{x^2}}dx$$

$x^2=u$ $2x\,dx=du$

$x=1 \Rightarrow u=1$

$x=R \Rightarrow u=R^2$

$$=\lim_{R\to\infty}\int_1^{R^2}\frac{1}{2}e^{-u}du=\lim_{R\to\infty}-\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_1^{R^2}$$

$$=\lim_{R\to\infty}\underbrace{-\frac{1}{2}.e^{-R^2}}_{0}+\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2e}\to \text{int. yakınsak}$$

$\int_1^{\infty}\frac{x}{e^{x^2}}dx$ integrali yakınsak olduğundan, integral testine göre $\sum_{n=1}^{\infty}n.e^{-n^2}$ serisi de yakınsaktır.

1. vize 4. uygulama

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!+1}$ serisinin karakteri?

I. Yol

$$\frac{n!}{(n+2)!+1} < \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{\cancel{n!}\cdot 1}{(n+2)(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n^2+3n+2} \quad (*)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ serisinin karakterini incelemek için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

seçelim. ($p=2>1$ yakınsak seridir)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+3n+2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0, \infty$$

$\Rightarrow$ Limit testine göre iki seri aynı karakterlidir. O halde $\sum \frac{1}{n^2+3n+2}$ de yakınsaktır.

(*) 'a göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!+1} < \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}}_{\text{Yakınsak}}$ dir.

Mukayese Testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!+1}$ serisi yakınsaktır.

Not: Oran Testini kullansaydık:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{n+1}{\cancel{(n+1)!}}}{(n+3)!+1} \cdot \frac{(n+2)!+1}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot\cancel{(n+2)!}\left(1+\overbrace{\frac{1}{(n+2)!}}^{0}\right)}{\underset{n+3}{\cancel{(n+3)!}}\left(1+\underbrace{\frac{1}{(n+3)!}}_{0}\right)} = 1$$

Test Sonuç vermezdi!!!

II. Yol Limit Testi ile:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($p=2>1$) yakınsak seçersek:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(n+2)!+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\cancel{n!}}{\underset{(n+2)(n+1)}{\cancel{(n+2)!}}\left(1+\underbrace{\frac{1}{(n+2)!}}_{0}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} = 1 \neq 0, \infty$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli $\sum \frac{n!}{(n+2)!+1}$ de yakınsak