Parametrik Denklemler

Eğer x ve y, $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ $(t\in I)$ şeklinde tanımlanmış fonksiyonlar ise o zaman bu denklemler ile tanımlanan $(x,y)=(f(t),g(t))$ noktalar kümesi bir parametrik eğridir. Bu denklemlere eğrinin "parametrik denklemleri" denir.

t değişkeni eğri için bir parametre, I da parametre aralığıdır. Parametre aralığı $[a,b]$ olursa, yani $a\le t\le b$ ise; eğrinin başlangıç noktası $(f(a),g(a))$, bitiş noktası $(f(b),g(b))$ olur.

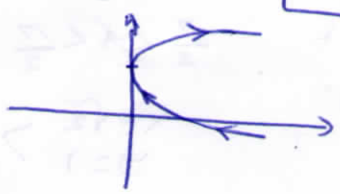
Aralıkla birlikte denklemlere eğrinin bir "parametrizasyonu" denir. ✱ Bir eğrinin birden fazla parametrizasyonu vardır.

⊛ $x=t^2$ $y=t+1$ $-\infty<t<\infty$ eğrisinin denklemini x, y cinsinden bulup çiziniz.

$y=t+1 \Rightarrow t=(y-1) \Rightarrow x=t^2=(y-1)^2$ $\boxed{x=(y-1)^2}$

$t\to-\infty \Rightarrow x\to\infty,\ y\to-\infty$

$t\to\infty \Rightarrow x\to\infty,\ y\to\infty$

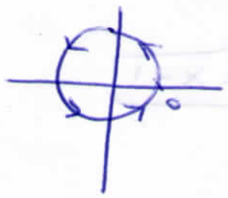


⊛ $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\le t\le 2\pi$

$x^2+y^2=a^2\cos^2t+a^2\sin^2t=a^2$ → a yarıçaplı merkezil çember

$t=0 \Rightarrow x=a,\ y=0$

$t=2\pi \Rightarrow x=a,\ y=0$



(*) $x=1+2\cos t$, $y=2\sin t$ parametrizasyonu ile verilen eğriyi bulunuz.

$$x=1+2\cos t \Rightarrow \cos t=\frac{x-1}{2}$$
$$y=2\sin t \Rightarrow \sin t=\frac{y}{2}$$
$$\Rightarrow \cos^2 t+\sin^2 t=\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$$
$$\Downarrow$$
$(x-1)^2+y^2=4$ çemberi

★ Türev:

f ve g fonksiyonları t de türevlenebilir ise $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ de türevlenebilirdir. Bu durumda:

★ $$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)} \quad (f'(t)\neq 0)$$

★ $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

(*) $x=\sec t$, $y=\tan t$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ eğrisinin $(\sqrt{2},1)$ noktasındaki teğetinin denklemi?

$y=f(x)$ in (a,b) noktasındaki teğeti: $y-b=f'(a)\cdot(x-a)$

$$(a,b)=(\sqrt{2},1) \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sqrt{2}=\sec t\\ 1=\tan t\end{array}\right\} \boxed{t=\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sec^2 t}{\sec t\cdot\tan t}=\frac{\sec t}{\tan t} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=f'(\sqrt{2})=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Teğet: $y-1=\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{y=\sqrt{2}x-1}$

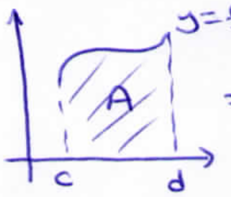
(P3)

* $x = t - t^2$, $y = t - t^3$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ türevini t cinsinden bulun.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1-3t^2}{1-2t}$$

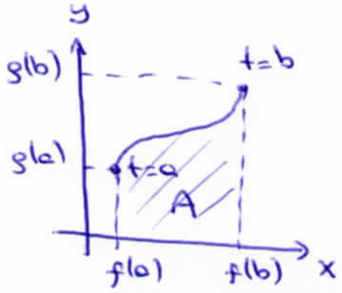
$$y'' = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-6t\cdot(1-2t)+2(1-3t^2)}{(1-2t)^2}}{1-2t} = \frac{6t^2-6t+2}{(1-2t)^3}$$

☆ **Alan:**



$$\Rightarrow \quad A = \int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d y\,dx \quad \text{idi.}$$

☆



$x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$ eğrisin alanı:

$$\boxed{A = \int_a^b g(t)\cdot f'(t)\,dt}$$ ile bulunur.

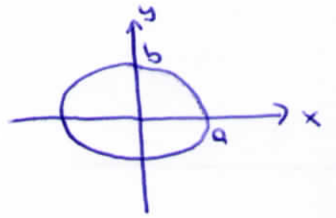
☆ DİKKAT ☆: (a,b) aralığında $g(t)\cdot f'(t) < 0$ ise $A = -\displaystyle\int_a^b g(t)\cdot f'(t)\,dt$ alınmalı

---

* $x = a\,\mathrm{Cos}t$, $y = b\,\mathrm{Sin}t$, $0 \le t \le 2\pi$ elipsinin alanını bulunuz.

$\dfrac{x}{a} = \mathrm{Cos}t$ $\quad \dfrac{y}{b} = \mathrm{Sin}t$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$x = f(t) = a\,\mathrm{Cos}t \Rightarrow f'(t) = -a\,\mathrm{Sin}t$

$y = g(t) = b\,\mathrm{Sin}t$

$$\frac{A}{4} = -\int_0^{\pi/2} b\,\mathrm{Sin}t(-a\,\mathrm{Sin}t)\,dt = \int_0^{\pi/2} a.b.\,\mathrm{Sin}^2t\,dt$$

$$= ab\int_0^{\pi/2} \frac{1-\mathrm{Cos}2t}{2}\,dt = ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\mathrm{Sin}2t}{4}\Big|_0^{\pi/2}\right]$$

$$= \frac{ab\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = ab\pi}$$

Parametrik Olarak Tanımlı Eğrinin Uzunluğu

Eğer C eğrisi : $x=f(t)$, $y=g(t)$, $a\le t\le b$ ile parametrik olarak tanımlıysa , $t=a$ dan $t=b$'ye artarken C eğrisi üzerinden sadece bir kez geçiliyorsa C nin uzunluğu:

$$L=\int_a^b \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt \quad \text{dir.}$$

⊛ $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ çemberinin uzunluğu?

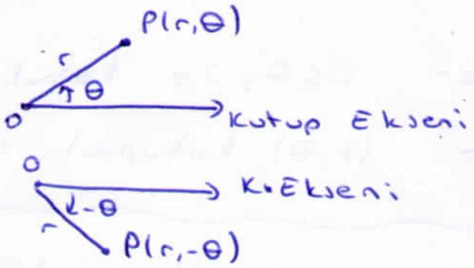
$$\left.\begin{aligned} f'(t)&=-r\sin t \Rightarrow (f'(t))^2=r^2\sin^2 t \\ g'(t)&=r\cos t \Rightarrow (g'(t))^2=r^2\cos^2 t \end{aligned}\right] \rightarrow (f')^2+(g')^2=r^2$$

$$L=\int_0^{2\pi} r\,dt = rt\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{2\pi r}}$$

KUTUPSAL KOORDİNATLAR

x ve y dik koordinatları düzlemdeki bir P noktasını bir dikey doğru ile bir yatay doğrunun kesişmesi olarak belirtir. Kutupsal koordinatlar ise bir P noktasını, bir çemberle merkezinden çıkan bir ışının kesişmesi olarak belirtir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

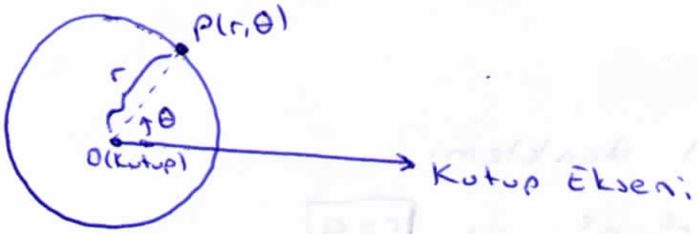
Düzlem üzerinde bir nokta ve bu noktadan çıkan bir ışın seçelim. Noktaya kutup, ışına ise kutup ekseni denir. Bu durumda düzlemdeki herhangi bir P noktasını $(r;\theta)$ kutupsal koordinat çifti ile gösterebiliriz. Burada r, P'nin orjine olan yönlü uzaklığı; θ'da kutup ekseni ile OP arasındaki yönlü açıdır.



Pozitif $\theta \rightarrow$ Saatin tersi yönünde
Negatif $\theta \rightarrow$ Saat yönünde ölçülür.

★ (r,θ) kutupsal koordinatına karşılık gelen P noktasını göstermek için aşağıdaki yol izlenir:

(r,θ) : Kutup eksenine θ derece açı ile duran doğru üzerinde, kutuptan r birim uzaklıkta bulunan noktadır.



r: Kutuptan P'ye olan yönlü uzaklık

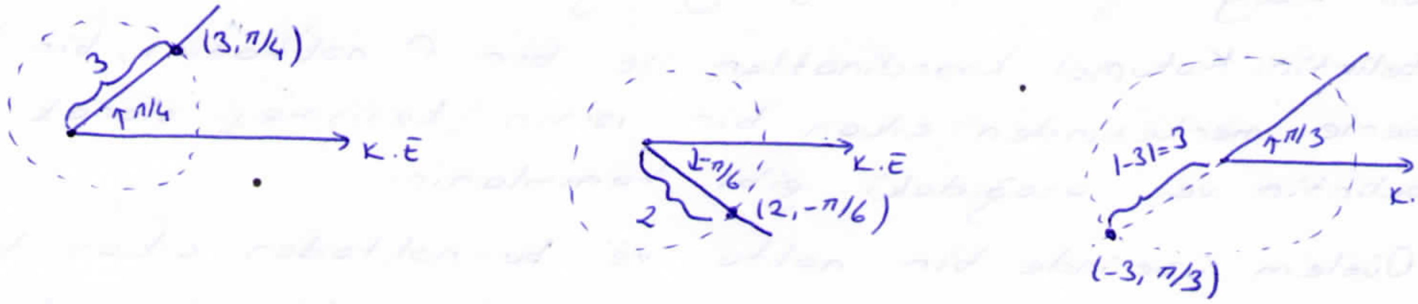
θ: Kutup ekseninden OP'ye olanan yönlü açı

★ Bir noktayı temsil eden sonsuz miktarda kutupsal koordinat çifti vardır.

★ Eğer $r=0$ ise θ ne olursa olsun P kutuptur.

★ Eğer $r<0$ ise: P, θ açılı ışının ters yönündeki $\theta+\pi$ açılı ışın üzerinde olup kutuptan $|r|$ birim uzaklıktadır.

* $\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(-3, \frac{\pi}{3}\right)$ noktalarını kutupsal koordinat düzleminde gösteriniz.

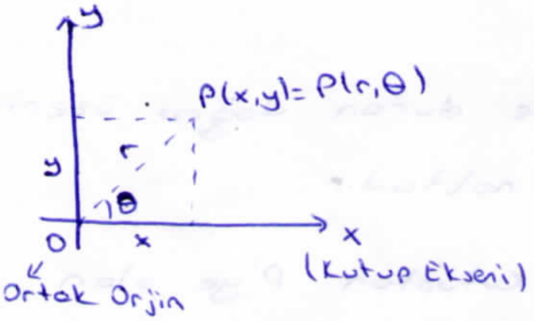


* $(r,\theta) = (-r, \theta+\pi) = (-r, \theta+3\pi) = \cdots = (-r, \theta+(2k+1)\pi)$

* $(r,\theta) = (r, \theta+2\pi) = (r, \theta+4\pi) = \cdots = (r, \theta+2k\pi)$

* Eğer $0 \leq \theta \leq 2\pi$ kabul edilirse düzlemin her noktasına tek bir (r,θ) kutupsal çifti karşılık gelir.

Kutupsal Koordinatlar ile Kartezyen Koor. Arasındaki Bağıntılar



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{aligned}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

* $x^2+y^2=a^2$ çemberinin kutupsal denklemi?

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2 = r^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{r=a}$

* $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 'nın kartezyen denklemi?

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$r^2 = a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2\left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}\right) = \frac{a^2}{r^2}(x^2-y^2)$$

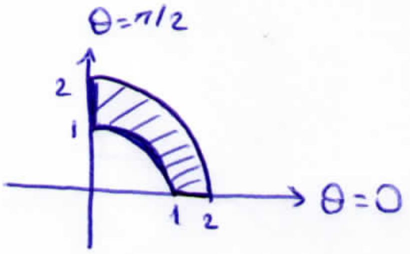
$(r^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \quad r^2 = x^2+y^2$ olduğundan

$$\boxed{(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)}$$

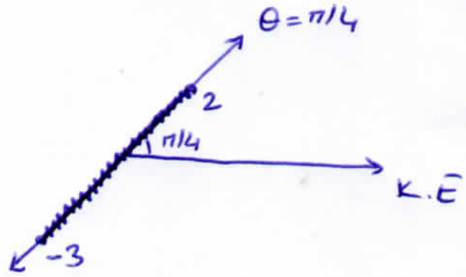
(k:3)

Kutupsal koordinatları aşağıdaki şartları sağlayan noktalar kümesinin grafiğini çiziniz.

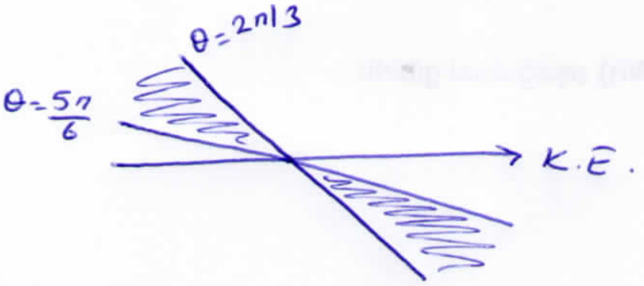
a) $1 \leq r \leq 2$ ve $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



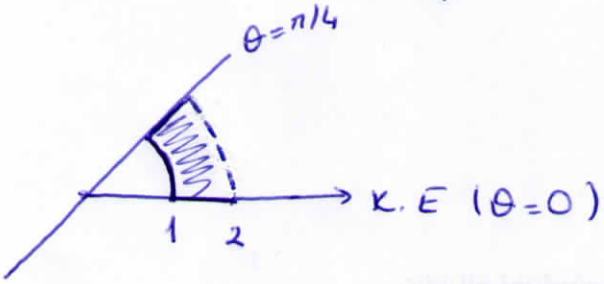
b) $-3 \leq r \leq 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{4}$



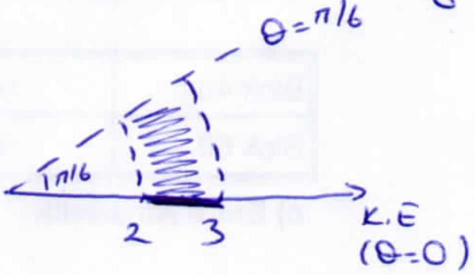
c) $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$



d) $1 \leq r < 2$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$



e) $2 < r < 3$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$



$\circledast$ $(x-a)^2+y^2=a^2$ çemberinin kutupsal denklemi? K. ④

$x^2-2xa+a^2+y^2=a^2 \Rightarrow x^2-2xa+y^2=0$ $\quad x=r\cos\theta$

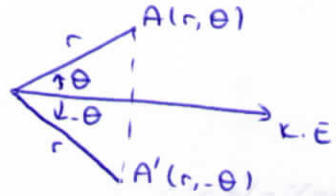
$y=r\sin\theta$

$r^2\cos^2\theta-2ar\cos\theta+r^2\sin^2\theta=0$

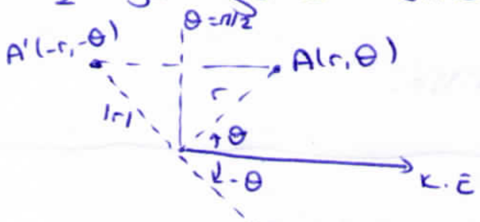
$r^2=2ar\cos\theta \Rightarrow \boxed{r=2a\cos\theta}$

Simetri Özellikleri

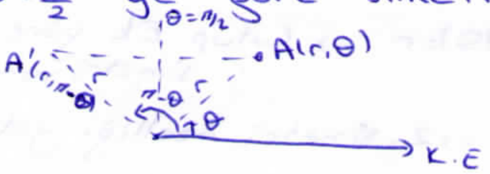
① a) $r=f(\theta)$ da θ yerine $-\theta$ yazdığımızda $f(-\theta)=f(\theta)=r$ ise kutup eksenine göre simetri vardır.



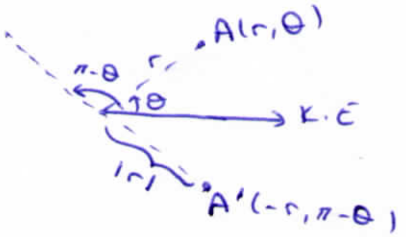
b) $r=f(\theta)$ da θ yerine $-\theta$ yazılınca $f(-\theta)=-f(\theta)=-r$ oluyor ise $\theta=\frac{\pi}{2}$ ye göre simetri vardır.



② a) $r=f(\theta)$ da θ yerine $\pi-\theta$ yazılınca $f(\pi-\theta)=f(\theta)=r$ ise $\theta=\frac{\pi}{2}$ ye göre simetri vardır.

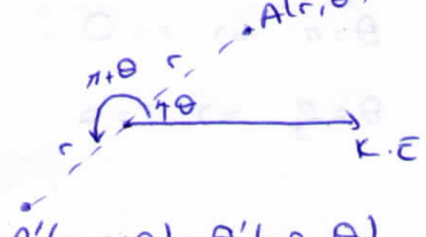


b) $r=f(\theta)$ da θ yerine $\pi-\theta$ yazılınca $f(\pi-\theta)=-f(\theta)=-r$ ise kutup eksenine göre simetri vardır.



③ a) $r=f(\theta)$ da θ yerine $\pi+\theta$ yazılınca $f(\pi+\theta)=f(\theta)=r$ ise (kutuba) orjine göre simetri vardır.

b) (r,θ) eğri üzerinde iken $(-r,\theta)$ da eğri üzerinde ise orjine göre simetri vardır.



$r=f(\theta)$ Eğrisinin Eğimi / $\frac{dy}{dx}$ türevinin (r,θ) daki değeri

(r,θ) noktasında $r=f(\theta)$ eğrisinin eğimi:

$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$
$y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta)} = m = \left.\frac{f'(\theta)\cdot\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}\right|_{(r,\theta)}$$

$\rightarrow \frac{dy}{d\theta}$

$\swarrow \frac{dx}{d\theta}$

formülü ile bulunur.

Kutupsal Koordinatlarda Eğri Çizimi

$r=f(\theta)$ nın grafiğini çizerken:

① Eğri periyodik ise periyodu bulunur.

② Simetri durumu incelenip çizim aralığı belirlenir.

③ $r=f(\theta)$ nın değişimi türev yardımıyla incelenir.

④ Bazı θ'lar için $(\theta, f(\theta))$ noktaları bulunur.

⑤ θ, r, r' içeren tablo yapılıp eğri çizilir.

⊗ $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

① Periyod: 2π $\rightarrow [0,2\pi]$ de çizilir.

② $\theta \rightarrow -\theta$ $\Rightarrow f(-\theta) = a(1+\cos(-\theta)) = a(1+\cos\theta) = f(\theta) = r$ $\Rightarrow$ Kutup Ek. göre simetri var

$\theta \rightarrow \pi-\theta$ $\Rightarrow f(\pi-\theta) = a(1+\cos(\pi-\theta)) = a(1-\cos\theta)$ $\Rightarrow$ 2. simetri özelliği yok

$\theta \rightarrow \pi+\theta$ $\Rightarrow f(\pi+\theta) = a(1+\cos(\pi+\theta)) = a(1-\cos\theta)$ $\Rightarrow$ 3. " " "

Kutup eksenine göre simetri olduğundan inceleme aralığı: $[0,\pi]$

③ $f'(\theta) = -a\sin\theta < 0$ $(\theta \in (0,\pi)$ için$)$

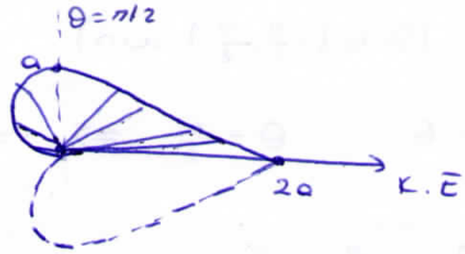
④ $\theta = 0 \Rightarrow r = 2a$

$\theta = \pi \Rightarrow r = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = a$

⑤

θ	0	$\pi/2$	π
r'	$-$	$-$	
r	$2a \searrow$	$a \searrow$	0



✱ $r = a(1 - \sin\theta)$ $(a > 0)$ eğrisini çiziniz.

① Periyod: $2\pi \rightarrow [0, 2\pi]$ de çizelim.

② $\theta \rightarrow -\theta \Rightarrow f(-\theta) = a(1 - \sin(-\theta)) = a(1 + \sin\theta) \neq f(\theta), -f(\theta)$ 1.S. YOK

$\theta \rightarrow \pi - \theta \Rightarrow f(\pi - \theta) = a(1 - \sin(\pi - \theta)) = a(1 - \sin\theta) = f(\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre simetri var

$\theta = \pi + \theta \Rightarrow f(\pi + \theta) = a(1 - \sin(\pi + \theta)) = a(1 + \sin\theta) \neq f(\theta), -f(\theta)$ 3.S. YOK

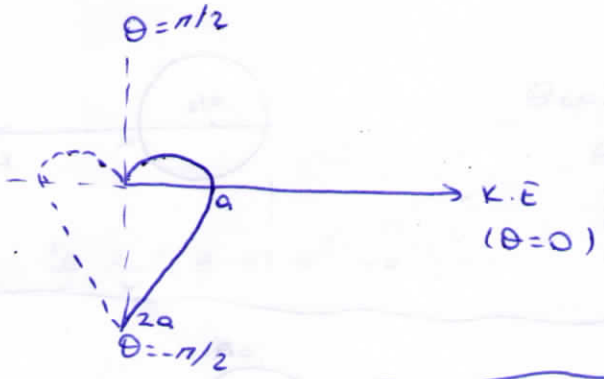
$\theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre simetri olduğundan inceleme aralığı: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

③ $f'(\theta) = -a\cos\theta < 0$ $\left(\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ için}\right)$

④ $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 0$ $\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 2a$ $\theta = 0 \Rightarrow r = a$

⑤

θ	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
r'	$-$	$-$	
r	$2a \searrow$	$a \searrow$	0



✱ $r = 2 - 4\sin\theta$ eğrisini çizin.

$\theta \rightarrow -\theta \Rightarrow f(-\theta) = 2 - 4\sin(-\theta) = 2 + 4\sin\theta \neq f(\theta), -f(\theta)$ 1. simetri yok

$\theta \rightarrow \pi - \theta \Rightarrow f(\pi - \theta) = 2 - 4\sin(\pi - \theta) = 2 - 4\sin\theta = f(\theta)$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre s. var.

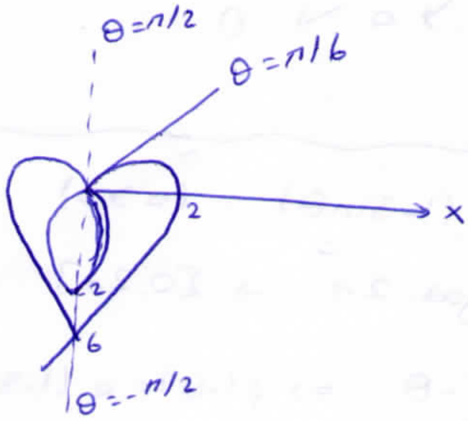
$\theta = \pi + \theta \Rightarrow f(\pi + \theta) = 2 - 4\sin(\pi + \theta) = 2 + 4\sin\theta \neq f(\theta), -f(\theta)$ 3. Sim. yok.

Periyod 2π, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ye göre simetri var $\Rightarrow$ inceleme aralığı: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$r' = -4\cos\theta < 0$ ($\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ için)

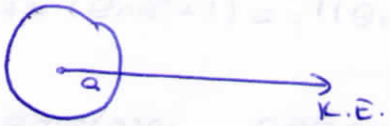
$\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 6$ $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = -2$ $\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow r = 0$ $\theta = 0 \Rightarrow r = 2$

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
r'		$-$		$-$		$-$	
r	6	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2



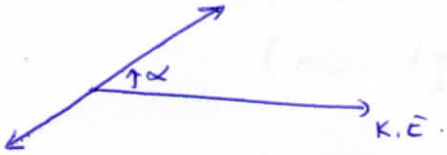
Temel Şekiller

① $r = a$ ⇒



Yarıçapı $|a|$ olan merkezil çember ($x^2+y^2=a^2$)

② $\theta = \alpha$ ⇒



Eğimi α olan doğru

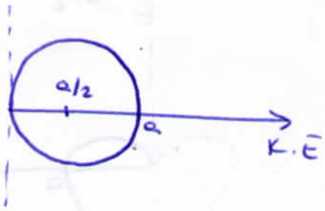
③ $r = a\cos\theta$

$r^2 = a^2\cos^2\theta$

$x^2+y^2 = a^2 \cdot \frac{x^2}{r^2}$

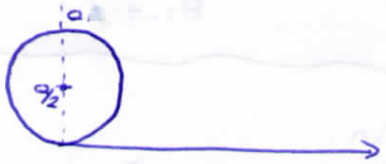
$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2$

$x^2+y^2 = ax \rightarrow (x-\frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$



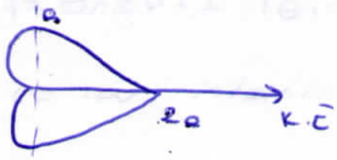
Kutup ve $(a,0)$ noktalarından geçen $\frac{a}{2}$ yarıçaplı çember ($(x-\frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ çemberi)

④ $r = a\sin\theta$



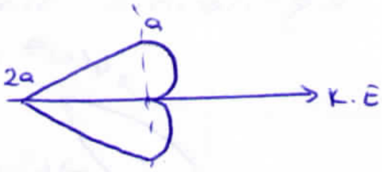
Kutup ve $(a, \frac{\pi}{2})$ noktalarından geçen $\frac{a}{2}$ yarıçaplı çember ($x^2 + (y-\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$ çemberi)

⑤ $r = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$



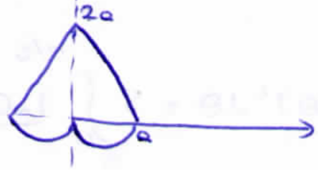
x-ekseni boyunca uzanan sivri ucu x-ekseninin pozitif yönünde olan Kardiyoid

6) $r = a(1-\cos\theta)$
$(a>0)$



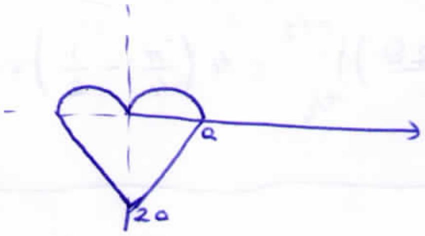
x-ekseni boyunca uzanan, sivri ucu x-ekseninin negatif yönünde olan Kardiyoid

7) $r = a(1+\sin\theta)$
$(a>0)$



y-ekseni boyunca uzanan sivri ucu y-ekseninin pozitif yönünde olan Kardiyoid

8) $r = a(1-\sin\theta)$
$(a>0)$



y-ekseni boyunca uzanan sivri ucu y-ekseninin negatif yönünde olan Kardiyoid.

9) $r\cos\theta = a \Rightarrow x = a$ doğrusu

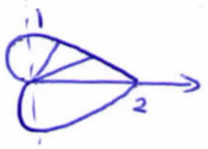
$r\sin\theta = b \Rightarrow y = b$ doğrusu

Kutupsal Koordinatlarda Alan Hesabı

$r = f(\theta)$ denklemiyle verilmiş bir eğrinin $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ doğrularıyla sınırlandığı alan:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta$$ formülü ile hesaplanır.

$r = 1+\cos\theta$ eğrisinin alanı?

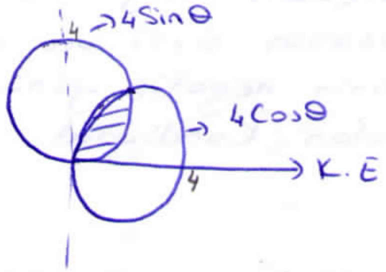


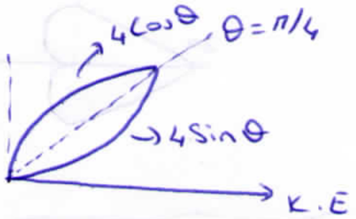
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta + 2\sin\theta\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{3\pi}{2}}$$

(*) $r = 4\cos\theta$ ile $r = 4\sin\theta$ eğrilerinin sınırladığı ortak alan?





$\cos\theta = \sin\theta$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (4\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (4\cos\theta)^2 d\theta = 8\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta + 8\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$

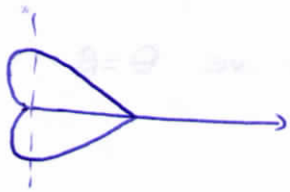
$$= 4\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4} + 4\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \underline{2\pi - 4}$$

Yay Uzunluğu

$r = f(\theta)$ denklemli eğrinin $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ arasındaki yay uzunluğu

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$$ formülü ile bulunur.

(*) $r = 1 + \cos\theta$ eğrisinin uzunluğu?



$r = 1 + \cos\theta \qquad r' = -\sin\theta$

$$r^2 + (r')^2 = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 2 + 2\cos\theta$$

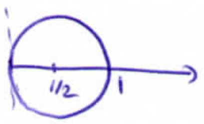
$$= 2 + 2\left[2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right] = 4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = \left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

$$S = \int_0^{2\pi} \left|2\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = \int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \left(-2\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= 4\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} - 4\sin\frac{\theta}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} = \boxed{8}$$

(*) $r = \cos\theta$ çemberinin uzunluğu?



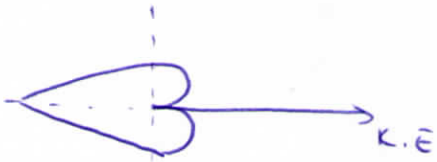
$$r = \cos\theta \qquad r' = -\sin\theta$$

$$r^2 + (r')^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\sqrt{r^2+(r')^2} = 1$$

$$S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

(*) $r = 1 - \cos\theta$ kardiyoidinin uzunluğu?



$$r = 1 - \cos\theta \qquad r' = \sin\theta$$

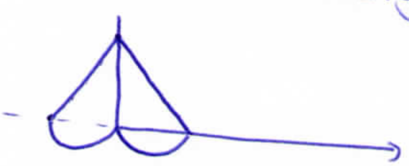
$$r^2 + (r')^2 = 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 2 - 2\cos\theta$$

$$= 2 - 2\left[1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right] = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\sqrt{r^2+(r')^2} = \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$$S = \int_0^{2\pi} \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = -4\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4 + 4 = \underline{\underline{8}}$$

(*) $r = 1 + \sin\theta$ kardiyoidinin uzunluğu?



$$r = 1 + \sin\theta \qquad r' = \cos\theta$$

$$r^2 + (r')^2 = 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta$$

$$= 2(1 + \sin\theta)$$

$$= 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) =$$

$$= 2\left(1 + \left(2\cos^2\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right) - 1\right)\right) = 4\cos^2\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)$$

$$\sqrt{r^2+(r')^2} = \left|2\cos\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)\right|$$

$$\frac{S}{2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|2\cos\left(\frac{\pi-2\theta}{4}\right)\right| d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos\left(\frac{\pi-2\theta}{4}\right) d\theta = \frac{2\sin\left(\frac{\pi-2\theta}{4}\right)}{-\frac{1}{2}} \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= -4\left[0 - 1\right] = 4 \qquad \boxed{S = 8}$$