11.6 Alterne Seriler

Tanım = $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ serisine alterne harmonik seri denir.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

Alterne Seri Testi =

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1-u_2+u_3-u_4\ldots$ serisi aşağıdaki üç koşulu sağlarsa yakınsaktır.

(i) $u_n>0$ her n için

(ii) her $n\geq N$ için $u_n\geq u_{n+1}$

(iii) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

örnek = $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$

$a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$, $u_n=\frac{1}{n}$

(i) $\frac{1}{n}>0$

(ii) $\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{n+1}$ olduğu için $u_n\geqslant u_{n+1}$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

Alterne Seri Testine göre yakınsaktır.

Tanım = $\sum |a_n|$ mutlak değerler serisi yakınsak ise, $\sum a_n$ serisi mutlak yakınsaktır.

Tanım = $\sum a_n$ yakınsak fakat $\sum |a_n|$ ıraksak ise $\sum a_n$ serisi koşullu yakınsaktır.

örnek = $\sum (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ serisi yakınsaktır.

$\sum \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$ serisi ıraksaktır

$\sum (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ serisi koşullu yakınsaktır.

Teorem = $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır

örnek = $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} = \frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 2}{4} + \frac{\sin 3}{9} + \frac{\sin 4}{16} + \dots$

$|a_n| = \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| = \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| = \sum \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

→ Karşılaştırma testinden yakınsaktır

↳ $p = 2 > 1$ olduğu için p serisinden yakınsaktır

→ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ mutlak yakınsaktır

11.7 Kuvvet Serileri

Tanım = $x=0$ civarında bir kuvvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$ şeklindedir.

$x=a$ civarında bir kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) \dots$

şeklindedir. Merkez a ve katsayılar $c_0, c_1, \dots, c_n \dots$

sabit sayılardır.

örnek = $c_0 = c_1 = \dots = c_n = \dots = 1$ olduğu zaman

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$ geometrik seridir.

$|x| < 1$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

* örnek = $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ kuvvet serisi hangi x değerleri

için yakınsaktır?

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}, \quad |a_n| = \frac{|x|^n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|x|^n}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot |x| = |x| = \rho < 1$$ Eğer $|x|<1$ ise, seri oran testinden seri mutlak yakınsaktır.

Eğer $|x|>1$, $\lim_{n\to\infty} x^n = ?$

yoktur.

$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$ yoktur.

Iraksaklık testinden, seri ıraksaktır.

Eğer $|x|=1$ ise $x=-1$ veya $x=1$ olur.

$x=-1$ olsun

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n}$$ → Alterne benziyor ama değil

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{harmonik seri ıraksaktır.}}$$

$x=1$ olsun.

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}}_{\text{Alterne harmonik seri yakınsaktır}}$$

Teorem= $\sum c_n (x-a)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık durumu aşağıdaki 3 durumdan biridir.

(i) Seri $x \in (a-R, a+R)$ için mutlak yakınsaktır.

$x = a-R$ veya $x = a+R$ için yakınsak veya ıraksaklık olabilir.

Diğer değerler için ıraksaktır.

(ii) x her reel sayı için yakınsaktır. $(R=\infty)$

(iii) $x = a$ için yakınsak, diğer değerler için ıraksaktır. $(R=0)$

Tanım= x'in yakınsak olduğu aralığa kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı denir. R değerine ise yakınsaklık çapı denir.

örnek= $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı nedir?

(oran testi)

$$a_n = \frac{x^n}{n!}, \quad |a_n| = \frac{|x|^n}{n!}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^2}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot |x| = 0 < 1$$

Bu yüzden her x reel sayısı için seri yakınsaktır.

Yakınsaklık aralığı $(-\infty, \infty)$, yakınsaklık yarıçapı ∞'dur.

örnek $= \sum_{n=1}^{\infty} n!\,(x-2)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} (n+1).\,|x-2|$$

Eğer $x=2$ ise $\lim_{n\to\infty}(n+1)|x-2| = 0 < 1$ seri yakınsaktır

Eğer $x \neq 2$ ise $\lim_{n\to\infty}(n+1)|x-2| = \infty > 1$ seri ıraksaktır

$R=0$

Teorem $= f(x)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $\sum c_n x^n$ kuvvet serisi $|x|<R$ için yakınsak ise, $\sum c_n [f(x)]^n$ kuvvet serisi de $|f(x)|<R$ için yakınsaktır.

örnek $= \sum (-1)^{n+1} . \frac{x^n}{n}$ serisi $|x|<1$ için yakınsaktır.

$f(x) = 3x-2$ olsun.

$\sum (-1)^{n+1} . \frac{(3x-2)^n}{n}$ serisi $|3x-2|<1$ için yakınsaktır

Teorem $= \sum c_n (x-a)^n$ serisi $x \in (a-R, a+R)$ için yakınsak ise

$$f(x) = \sum c_n (x-a)^n, \quad x \in (a-R, a+R)$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n.c_n (x-a)^{n-1}$$

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

örnek $= f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

türev al

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 0 + 1 + 2x + 3x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = 0 + 0 + 2 + 3.2.x + 4.3.x^2$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

$$f''\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{2}{(1/2)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x| + c_1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + c_2$$