Taylor ve Maclaurin Serileri

Tanım = $f(x)$ tarafından $x=a$ değerinde üretilen Taylor serisi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f'(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots$$ $a=0$ için bu seriye Maclaurin serisi denir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3$$

örnek = $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $a=2$ değerinde ürettiği Taylor serisini bulunuz.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(2)}{k!} (x-2)^k = \frac{(-1)^k \cdot k!}{2^{k+1}} \cdot (x-2)^k$$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$f(2) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

$f'(2) = \frac{-1}{4}$

$$f^{(k)} = \frac{(-1)^k \cdot k!}{x^{k+1}}, \quad f^{(k)}(2) = \frac{(-1)^k \cdot k!}{2^{k+1}}$$

$f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f''(2) = \frac{1}{4}$

Tanım = $f(x)$ tarafından $x=a$ değerinde üretilen n. mertebe Taylor polinom

$$P_n(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}$$

örnek = $f(x)=e^x$ fonksiyonunun $x=0$ değerinde ürettiği Taylor serisini bulunuz.

$f(x)=e^x \quad f(0)=e^0=1$

$f'(x)=e^x \quad f'(0)=e^0=1 \qquad f^{(k)}(x)=e^x$

$f''(x)=e^x \quad f''(0)=e^0=1 \qquad f^{(k)}(0)=1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot x^k = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

örnek = $f(x)=e^x$ fonksiyonunun $x=0$ değerinde ürettiği 3. mertebeden Taylor polinomunu kullanarak $e^{0.1}$ değerini yaklaşık olarak bulunuz.

$$P_3(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

$$e^{0.1}=f(0,1)=1+0,1+\frac{(0,01)^2}{2}+\frac{(0,001)}{6}$$

$$e^{0,1}\approx \underline{1,10516}$$

örnek = $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun $x=0$ değerinde ürettiği Taylor serisini bulunuz.

$f(x)=\cos x \quad f(0)=1$

$f'(x)=-\sin x \quad f'(0)=0$

$f''(x)=-\cos x \quad f''(0)=-1$

$f'''(x)=\sin x \quad f'''(0)=0$

$f^{(k)}\cdot x^{2k}$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}\cdot\frac{(-1)^k}{2k!}}$$

Kuvvet Serileri Yazılım

1) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $-1<x<1$ yakınsaklık aralığı

2) $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . x^n$, $-1<x<1$

3) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, her x için

4) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1) . x^{2n}}{(2n)!}$ her x için

5) $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \, x^{2n+1}}{2n+1}$, $-1< x<1$

6) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n . x^{(2n+1)!}}{(2n+1)!}$, her x için

örnek = $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$ değerini yaklasık olarak bulunuz.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} . x^{2n+1}$$

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} . x^{4n+2}$$

$$\int \sin(x^2)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{x^{4n+3}}{4n+3} + c$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{1320} \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320}$$

örnek= $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ < ?

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \rightarrow \int \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int x^n$$

$$= \lim_{x \to 1} \left[x-1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{4} + \dots \right]$$

$$-\ln|1-x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln|1-x| = -\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$$

$$\ln|1-(1-x)| = -\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^{n+1}$$

$$\ln|x| = \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^{n+1}$$