

Soru: Yakınsaklık aralığı içindeki bir kuvvet serisi toplamının her mertebeden türevi olan bir sürekli fonk. olduğunu biliyoruz. Acaba bunun tersi doğru mudur? Eğer bir $f(x)$ fonksiyonunun bir I aralığında her mertebeden türevi varsa o aralıkta fonksiyonu bir kuvvet serisi ile ifade edebilir miyiz? Eğer yapabilirsek bu kuvvet serisinin katsayıları için ne söylenebilir?

Son soruyu, eğer $f(x)$ fonksiyonu pozitif yakınsaklık yarıçapına sahip

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

kuvvet serisi olarak ifade edilirse cevaplayabiliriz. I yakınsaklık aralığının içindeki terimleri tek tek türevlersek;

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + n(x-a)^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot a_4(x-a)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a_5(x-a)^2 + \dots$$

! Tüm n 'ler için genel olarak şöyle yazabiliriz:

Bu denklemler $x=a$ da geçerli olduklarından;

$$f'(a) = a_1, \quad f''(a) = 1 \cdot 2 \cdot a_2, \quad f'''(a) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3, \quad \dots, \quad f^{(n)}(a) = n! \cdot a_n$$

elde ederiz. Böylece; eğer böyle bir seri varsa bir

tanedir ve n . katsayısı $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ şeklindedir.

Dolayısıyla f 'in bir seri açılımı varsa şöyle olmalıdır:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (*)$$

Simdi, eger $x=a$ merkezli bir I araliginde her mer- (42)
beden türevi olan herhangi bir f fonksiyonu ile baslarsak
ve bu fonksiyonu $(*)$ daki seriyi üretmek için kullanirsak,
bu seri I daki her x için $f(x)$ 'e yakinsor mu?
Cevap "belki" dir. Bazı fonksiyonlar için doğru, bazıları
icin ise yanlıştır.

Taylor Serisi: f fonksiyonu, bir a noktasını içeren bir
aralıkta her mertebeden türevlenebilir bir fonk. olsun.
Bu durumda f tarafından $x=a$ noktasında üretilen

Taylor Serisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

Maclaurin Serisi: f tarafından üretilen Maclaurin Serisi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

olarak tanımlanır. Yani Maclaurin Serisi $x=0$ daki Taylor
Serisidir.

Taylor Polinomları: f fonksiyonu bir a noktasını içeren bir
aralıkta n . mertebeden türevelenebilir bir fonksiyon olsun.
Bu durumda, f tarafından $x=a$ da üretilen n . mertebe Taylor

Polinomu: $P_n(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

* Yüksek mertebeden Taylor Polinomları, f in a civarındaki
en iyi polinom yaklaşımlarını verir.

* $f(x) = e^x$ tarafından üretilen $x=0$ daki Taylor

Serisini ve Taylor Polinomunu bulunuz.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^x \rightarrow f(0) = 1 \\
 f'(x) &= e^x \rightarrow f'(0) = 1 \\
 f''(x) &= e^x \rightarrow f''(0) = 1 \\
 &\vdots \\
 f^{(n)}(x) &= e^x \rightarrow f^{(n)}(0) = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Taylor Serisi} &\Rightarrow f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \\
 &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\text{Taylor Polinomu} \Rightarrow P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

* $f(x) = \cos x$ in $x=0$ daki Taylor Serisi ve Polinomu?

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cos x \rightarrow f(0) = 1 \\
 f'(x) &= -\sin x \rightarrow f'(0) = 0 \\
 f''(x) &= -\cos x \rightarrow f''(0) = -1 \\
 f'''(x) &= \sin x \rightarrow f'''(0) = 0 \\
 &\vdots \\
 f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \cos x \rightarrow f^{(2n)}(0) = (-1)^n \\
 f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} \sin x \rightarrow f^{(2n+1)}(0) = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Taylor Serisi} \Rightarrow f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = 1 + 0x + \frac{x^2}{2} + 0 \cdot x^3 + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{Taylor Polinomu} \Rightarrow P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

($f^{(2n+1)}(0) = 0$ olduğundan $P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x)$)

* $f(x) = \frac{1}{x}$ tarafından $a=2$ de üretilen Taylor Serisini (44)

bulunuz. Hangi noktalarda seri $\frac{1}{x}$ 'e yakınsar?

$f(2), f'(2), f''(2), \dots$ hesaplamalıyız.

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \rightarrow f''(x) = \frac{2!}{x^3} \rightarrow f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \dots \rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \quad f'(2) = -\frac{1}{2^2} \quad f''(2) = \frac{2!}{2^3} \quad \dots \quad f^{(n)}(2) = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$$

Taylor Serisi:

$$f(2) + f'(2)(x-2) + f''(2)(x-2)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \dots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} + \dots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \dots \text{ olur.}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{(x-2)}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \text{Geometrik Seri} \quad a = \frac{1}{2}$$

$$r = -\frac{(x-2)}{2}$$

Bu seri geometrik seridir ve $|r| = \left|-\frac{(x-2)}{2}\right| = \left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$

icin mutlak yakınsaktır.

$$\text{Toplamı} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{x-2}{2}} = \frac{1}{x} \text{ dir.}$$

$$\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1 \Rightarrow |x-2| < 2 \Rightarrow \boxed{0 < x < 4}$$
 değerleri için

Taylor Serisi $\frac{1}{x}$ e yakınsar

* $\sqrt[3]{1,2}$ için, 2. mertebe Taylor polinomunu kullanarak yaklaşık değer bulun.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a=1$ olsun.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3} \Rightarrow f(1) = 1 \quad f'(1) = \frac{1}{3} \quad f''(1) = -\frac{2}{9}$$

$$f(x) \approx P_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9} \frac{(x-1)^2}{2!}$$

$$f(1,2) \approx P_2(1,2) = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,2 - \frac{1}{9} \cdot (0,2)^2 = \underline{\underline{1,062}}$$

Sik Kullanan Maclaurin Serileri

$$\textcircled{1} \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1-x+x^2+\dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$\textcircled{3} e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\textcircled{4} \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\textcircled{5} \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\textcircled{6} \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$\textcircled{7} \text{ArcTan} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

\textcircled{x} $e^{-x^2/3}$ in Maclaurin Serisi?

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots$$

$$e^{-\frac{x^2}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^n n!} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{3^2} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

* Sin²x in Maclaurin Serisinin genel terimi?

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \dots \right) \\ &= \frac{2x}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad (\forall x \text{ için}) \end{aligned}$$

* Tanx in Maclaurin serisinin ilk 3 terimini Cosx ve Sinx in seri acilmalari yardimiyyla bulunuz.

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots} \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}} \cdot \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}} \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}} \cdot \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}}{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots} \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{30} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}} \cdot \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}}{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots} \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \dots \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} - \dots \\ &= \frac{2x^5}{15} - \dots \end{aligned}$$

* E(x) = ∫₀^x e^{-t²} dt nin Maclaurin Serisinin genel terimi?

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots \quad (\forall t \text{ için})$$

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \dots \right) dt = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5 \cdot 2!} - \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \frac{t^9}{9 \cdot 4!} - \dots \Big|_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!} \quad (\forall x \text{ için}) \end{aligned}$$

* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ limitini seri asilimi ile hesaplayın. (49)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \dots\right) = \frac{1}{6}$$

* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1) \cdot \ln(1+x^3)}{(1 - \cos 3x)^2} = ?$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \Rightarrow \cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \dots$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \Rightarrow \ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \dots$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1) \cdot \ln(1+x^3)}{(1 - \cos 3x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots - 1\right) \cdot \left(x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \dots\right)}{\left(1 - 1 + \frac{9x^2}{2} - \frac{3^4 x^4}{4!} - \dots\right)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4 + 2x^5 + \dots}{\left(\frac{9x^2}{2} - \frac{3^4 x^4}{4!} + \dots\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + 2x + \dots}{\left(\frac{9}{2} - \frac{3^4 x^2}{4!} + \dots\right)^2} = 2 \cdot \frac{4}{81} = \frac{8}{81}$$

Binom Serisi

(50)

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!} x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-(n-1))}{n!} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ in kuvvet serisi temsilini bulunuz.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right)}{3!} x^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} x^3 + \dots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} (-x)^n \quad (-1 < x < 1)$$