(*) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{(n-1)\ln n}$ serisinin karakteri?

① Mutlak Yakınsak mı?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{(n-1)\ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)\ln n}$$ yakınsak mı? $\forall n \geq 2$ için $\ln n < n$ dir.

$$\frac{n}{(n-1)\ln n} > \frac{n}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)\ln n} > \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{Harmonik Seri Iraksak}}$$

Mukayese testine göre $\sum \frac{n}{(n-1)\ln n}$ de ıraksak.

Dolayısıyla $\sum (-1)^n \frac{n}{(n-1)\ln n}$ mutlak yak. değil.

② Şartlı Yakınsak mı? $a_n = \frac{n}{(n-1)\ln n}$

a) $a_n > 0$ ✓

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n^2-1)\ln n}{n^2 \ln(n+1)} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ ✓

c) $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{(n-1)\ln n} = 0$ ✓

Alterne Seri Testine göre seri şartlı yakınsaktır.

(*) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1+\sin n}{n} a_n$ olarak verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsaklığını inceleyin.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1+\sin n}{n} = 0 < 1$$ Oran Testine göre Seri yakınsaktır

$\circledast$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ karakteri?

*

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$ Kök testine göre seri yakınsak

---

$\circledast$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$ karakteri?

*

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n}}{\ln n} = 0 < 1$ Kök testine göre yakınsak. $\left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1\right)$

$\circledast$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1}$ serisinin karakteri?

*

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ serisi için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $(p=2>1)$ yakınsak serisini seçelim.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0, \infty$ olduğundan limit testine göre iki seri aynı karakterli

$\sum \frac{n}{n^3+1}$ yakınsak dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1}$ mutlak yakınsaktır.

$\circledast$ $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\ln n}$ karakteri? $\sum_{n=2}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n\ln n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ $[2,\infty)$ da sürekli ✓ pozitif ✓ azalan ✓

integral testi uygulanabilir.

*

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{R\to\infty} \left[\ln(\ln x)\Big|_2^R\right] = \lim_{R\to\infty} \left[\ln(\ln R) - \ln(\ln 2)\right] = \infty$ Iraksak olduğundan seri de ıraksak.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ ıraksak $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\ln n}$ mutlak yakınsak <u>değil.</u>

Ancak Alterne seri testinin 3 koşulu da sağlandığından

$\left(\frac{1}{n\ln n} \text{ pozitif, azalan, } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln n} = 0\right)$ $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\ln n}$ <u>şartlı yakınsak</u> seridir.

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi, Sınav Soru ve Cevap Kağıdı			NOT TABLOSU				
			3a. S	3b. S	4a. S	4b. S	TOPLAM
Adı Soyadı							
Öğrenci Numarası		Grup No					
Bölümü				Sınav Tarihi			28/04/2012
Dersin Adı	0251322 Matematik II 2. Değerlendirme		Sınav Süresi		Sınav Yeri		
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı				İmza			

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

3) a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{2+n}$ serisinin yakınsak olup olmadığını açıklayarak belirtiniz...

$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1+n}{2+n}\right\} = 1$

n. terim testine göre $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ olduğundan

seri ıraksaktır.

3) b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100.\cos(n\pi)}{2n+3}$ serisinin yakınsak, mutlak yakınsak, şartlı yakınsak ve ıraksak olup olmadığını açıklayarak belirtiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 100}{2n+3}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n 100}{2n+3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{2n+3}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{100}{2n+3}}{\frac{1}{n}} = 50 \neq 0$

limit karşılaştırma testine göre

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksak

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{2n+3}$ ıraksaktır.

$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n 100}{2n+3}$ serisi mutlak yak değildir.

ii) Alterne seri testine göre

1) $\lim a_n = 0$

2) $|a_{n+1}| < |a_n|$

3) $\{a_n\}$ alterne

olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 100}{2n+3}$ yakınsaktır.

iii) Dolayısıyla şartlı yakınsaktır.

3

④ $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}$ serisinin karakteri?

1)

$|a_n| = \frac{2n-1}{\sqrt{n}.(n-1)} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}$ yakınsak mı?

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ seçelim. $p = \frac{1}{2} < 1$ ıraksak

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 2 \neq 0, \infty$ Limit Testine göre iki seri aynı karakterli. $\sum \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}$ yakınsak değil.

Dolayısıyla $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}$ mutlak yak. değil.

② Şartlı Yakınsak mı?

a) $a_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)} > 0$

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}.n}}{\frac{2n-1}{\sqrt{n}.(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n^2-n-1}{2n^2-n} < 1$

$a_{n+1} < a_n$ ✓

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)} = 0$

olduğundan Alterne Seri Testine göre $\sum (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{\sqrt{n}(n-1)}$ şartlı yakınsaktır.

Soru 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

(Bulunan aralığın uç noktaları için de serinin yakınsaklığını inceleyiniz.)

Cevap 2.

$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ $(n=1,2,\dots)$ olmak üzere,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}\right) \quad (\theta 4)$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}}\right) \quad (\theta 3)$$

$$= 1\cdot 1 = 1$$

olduğundan, yakınsaklık yarıçapı $R=\frac{1}{L}=1$'dir; $(\theta 2)$

Verilen seri $|x-2|< R=1$ şeklindeki her x için (mutlak) olarak yakınsar.

$(\theta 4)$ O halde seri her $x\in(1,3)$ için (mutlak) olarak yakınsaktır,

her $x<1$ ve her $x>3$ için ıraksaktır.

Ayrıca;

$(\theta 5)$ $x=1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-2)^n}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+1}}$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 \neq 0$ ***

(veya, $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+1}}$ mevcut olmadığından)

olduğundan, $x=1$'de seri ıraksaktır, ve ***

$(\theta 5)$ $x=3$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-2)^n}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 \neq 0$

olduğundan, $x=3$'te seri ıraksaktır.

$(\theta 2)$ Buna göre verilen serinin yakınsaklık aralığı $(1,3)$ açık aralığıdır.

Pinar Albayrak

$\circledast$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+1}}$ serisi hangi x değerleri için mutlak yakınsak, şartlı yakınsak, ıraksaktır. Yakınsaklık aralığı?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{(n+1)^3+1}} \cdot \frac{\sqrt[4]{n^3+1}}{(x-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\sqrt[4]{n^3+1}}{\sqrt[4]{(n+1)^3+1}}}_{1} \cdot |x-1| = |x-1| < 1 \Rightarrow \boxed{0<x<2}$$

Mutlak Yak.

$x=2$ için

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}}$ serisi $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ seçelim. $p=\frac{3}{4}<1$ ıraksaktır

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}} = 1 \neq 0, \infty$$

iki seri aynı karakterli.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}}$ de ıraksak

$x=0$ için

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+1}}$ $\Rightarrow$ Seri mutlak yakınsak değildir.

① $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} = 0$ ✓ ② $\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} > \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3+1}}$ $(a_{n+1} < a_n)$ ✓

③ $a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} > 0$ ①, ② ve ③'den seri şartlı yakınsak

Seri:

$0<x<2$ için mutlak yakınsak
$x=0$ " şartlı yakınsak

$\Big\}$ $[0,2) \to$ yakınsaklık aralığı

$x \in \mathbb{R} - [0,2)$ için ıraksaktır.

$\circledast$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(n+1)!}$ karakteri?

$$\frac{1+n!}{(n+1)!} > \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(n+1)!} > \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ seçelim. H. Seri ıraksak

Limit T. göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow \sum \frac{1}{n+1} \text{ de ıraksak}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(n+1)!} > \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}}_{\text{ıraksak}} \Rightarrow \text{Mukayese testine göre } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(n+1)!} \text{ de ıraksak}$$

$\circledast$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ serisinin yakınsaklık aralığı?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{(2n+2)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{Yakınsaklık Aralığı } (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

$\circledast$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \cdot \left(\frac{3x+2}{-5}\right)^n$ yakınsaklık Aralığı? mutlak yak., şartlı yak., ıraksak olduğu x değerleri?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2n+2} \cdot \left(\frac{3x+2}{-5}\right)^{n+1} \cdot 2n \cdot \left(\frac{-5}{3x+2}\right)^n \right| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2n}{2n+2}}_{1} \cdot \frac{|3x+2|}{5} < 1$$

$$|3x+2| < 5 \Rightarrow -5 < 3x+2 < 5 \Rightarrow \boxed{-\frac{7}{3} < x < 1} \text{ Mutlak Yakınsak}$$

x=1 ise: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \Rightarrow$ Alterne Harmonik Seri şartlı yak. $\boxed{x=1}$

x=$-\frac{7}{3}$ ise: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \Rightarrow$ Harmonik Seri ıraksak

Seri:

- $-\frac{7}{3} < x < 1$ için M. Yak.
- x=1 için Ş. Yak.
- $x \in \mathbb{R} - (-\frac{7}{3}, 1]$ için ıraksak

$(-\frac{7}{3}, 1]$: Yak. Aralığı

(*) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}} \cdot (2x-3)^k$ serisi hangi x değerleri için mutlak yakınsak, şartlı yakınsak, ıraksaktır? Yakınsaklık Aralığı?

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(2x-3)^{k+1}}{(k+1)\sqrt{(k+1)^2+1}} \cdot \frac{k\cdot\sqrt{k^2+1}}{(2x-3)^k} \right|$$

$$= \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{k\cdot\sqrt{k^2+1}}{(k+1)\sqrt{(k+1)^2+1}}}_{1} \cdot |2x-3| = |2x-3| < 1 \Rightarrow -1 < 2x-3 < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{1 < x < 2}$$

Mutlak Yak.

<u>x=1 için</u>

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ seçelim. $p=2>1$ yakınsak $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}}{\frac{1}{k^2}} = 1 \neq 0, \infty$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli.

$\sum \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$ de yakınsak.

$\Downarrow$

$\boxed{x=1}$ ✓ (Mutlak Yak.

<u>x=2 için</u>

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$ yakınsak olduğundan

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}}$ mutlak yakınsaktır.

$\boxed{x=2}$ ✓ (Mutlak Yak.)

Seri;

$1 \le x \le 2$ için mutlak yakınsaktır.

Şartlı yakınsak olduğu bir x değeri yoktur.

} $[1,2]$ yakınsaklık aralığı

$x \in \mathbb{R} - [1,2]$ için ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{3^n . n}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz. Seri hangi x değerleri için mutlak yakınsak, şartlı yakınsak ve ıraksaktır?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2x-3)^{n+1}}{3^{n+1}.(n+1)} \cdot \frac{3^n . n}{(2x-3)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot |2x-3| = \frac{|2x-3|}{3} < 1$$

$$\frac{|2x-3|}{3} < 1 \Rightarrow -3 < 2x-3 < 3 \Rightarrow \boxed{0 < x < 3}$$ Mutlak Yakınsak.

$x=3$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n . n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$$ Harmonik Seri

Iraksak

$x=0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n . n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow$$ Alterne Harmonik Seri

Şartlı Yakınsak

Seri;

$0<x<3$ için Mutlak Yakınsak

$x=0$ " Şartlı Yakınsak

} $\underline{x \in [0,3)}$ de yakınsak

⇓

Yakınsaklık Aralığı

=

$[0,3)$

$x \in \mathbb{R} - [0,3)$ için ıraksaktır

Pınar Albayrak

(*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \ln n}$ serisinin yakınsaklık aralığı, mutlak / şartlı yak. olduğu x' değerleri?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1).\ln(n+1)} \cdot \frac{n.\ln n}{(x-2)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{(n+1)\ln(n+1)} . |x-2|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{1} . \underbrace{\frac{\ln n}{\ln(n+1)}}_{1} . |x-2| < 1 \Rightarrow \boxed{1<x<3}$$

Mutlak Y.

$x=3$ için

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \Rightarrow$

① $f(x) = \frac{1}{x \ln x} > 0$ ($x \in [2,\infty)$ için)

② $f'(x) = -\frac{1+\ln x}{x^2 \ln^2 x} < 0 \Rightarrow f(x)$ azalan

③ $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ $[2,\infty)$ da sürekli

integral testi uygulanabilir ✓

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{R\to\infty} \int_2^{R} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{R\to\infty} \ln(\ln x) \Big|_2^R = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\ln(\ln R)}_{\infty} - \ln(\ln 2) = \infty$$

⇓

integral ıraksak

⇓

Seri ıraksak

$x=1$ için

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} \Rightarrow$ Mutlak Yak. değildir.

① $a_n = \frac{1}{n \ln n} > 0$ ② $a_{n+1} < a_n$? $\frac{1}{(1+n)\ln(n+1)} < \frac{1}{n \ln n}$ ✓ ③ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$ ✓

Alterne Seri Testine göre seri şartlı yakınsaktır.

Seri:

$1<x<3$ için Mutlak Yak.
$x=1$ için Şartlı Yak.

$[1,3)$ için yakınsak (Yak. Aralığı)

$x \in \mathbb{R} - [1,3)$ için ıraksaktır.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(3-2x)^k}{k^2 \ln k}$$ serisinin yakınsaklık aralığı?

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(3-2x)^{k+1}}{(k+1)^2\ln(k+1)}\cdot\frac{k^2.\ln k}{(3-2x)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\underbrace{\frac{k^2}{(k+1)^2}\cdot\frac{\ln k}{\ln(k+1)}}_{1}\cdot|3-2x| = |3-2x| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{1<x<2}$$ M.Yak.

$$\left(\lim_{k\to\infty}\frac{\ln k}{\ln(k+1)} = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} = 1\right)$$

x=1 için

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2\ln k} \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$ seçelim. $p=2>1$ yakınsak

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{\cancel{k^2}\ln k}}{\frac{1}{\cancel{k^2}}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\ln k} = 0 \Rightarrow$$ Limit Testine göre; $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ yak. olduğundan $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2\ln k}$ de yakınsak

x=2 için

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2\ln k} \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2\ln k}$$ yakınsak olduğundan $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2\ln k}$ mutlak yak.

Seri:

$1\le x\le 2$ için mutlak yak.

Serinin şartlı yak. olduğu x değeri yok $\Big\}$ $[1,2]$ yak. aralığı

$x\in \mathbb{R}-[1,2]$ için ıraksak

Soru 2. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(3-2x)^k}{k^2 \ln k}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz. Bu aralığın uç noktaları için seriyi inceleyiniz. *(25puan)*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(3-2x)^{k+1}}{(k+1)^2\ln(k+1)}\cdot\frac{k^2\ln k}{(3-2x)^k}\right|$$

$$= |3-2x| \lim_{k\to\infty}\left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\cdot\frac{\ln k}{\ln(k+1)}\right] = |3-2x|.1.1 = |3-2x| < 1$$

$$-1 < 3-2x < 1$$

$$\boxed{1 < x < 2}$$

$$\left(\lim_{k\to\infty}\frac{\ln k}{\ln(k+1)} \overset{L}{=} \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} = 1\right)$$

<u>$x=1$ için</u> $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2\ln k}$ serisi

$b_k = \frac{1}{k^2}$ olmak üzere $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ $p=2>1$ yak.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^2\ln k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\ln k} = 0 \quad \text{ve}$$

$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ serisi yak. oldugundan $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2\ln k}$ serisi de yakınsak

<u>$x=2$ için</u> $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2\ln k}$ alterne serisi mutlak yakınsak-tır.

Sonuç olarak Y.A $\boxed{1 \leq x \leq 2}$ dır.

(12)

(8)

(x) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3+2^n}$ serisinin mutlak / şartlı yakınsak, ıraksak olduğu x değerleri?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{3+2^{n+1}} \cdot \frac{3+2^n}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2^n}{3+2^{n+1}} \cdot |x| = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}(\overset{0}{\frac{3}{2^n}}+1)}{\cancel{2^n}(\underset{0}{\frac{3}{2^n}}+2)} \cdot |x|$$

$$= \frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow \boxed{-2<x<2}$$

M.Y.

<u>x=2 için</u>

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3+2^n}$ serisi elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}^{1}}{\cancel{2^n}(\underset{0}{\frac{3}{2^n}}+1)} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$ n. Terim Testine göre seri ıraksak

<u>x=-2 için</u>

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{3+2^n}$ serisi elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3+2^n} = 1 \neq 0 \Rightarrow$$ Alterne seri testine göre seri ıraksaktır.

Mutlak yakınsak: $-2<x<2$
Şartlı " : yok

$(-2,2) \to$ yakınsaklık aralığı

Iraksak: $\mathbb{R}-(-2,2)$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(x-3)^n$ serisi hangi x değerleri için mutlak veya şartlı yakınsar?

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(x-3)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}(x-3)^n$ şeklinde düzenleyelim

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(x-3)^n}\right|=|x-3|<1 \Rightarrow \boxed{2<x<4}$ M.Yakınsak

$x=4$ için

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ serisi elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ($p=\frac{1}{2}<1$ ıraksak) seçelim.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{1}{2}\neq 0,\infty \Rightarrow$ Limit Testine göre iki seri aynı karakterli; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ıraksak

$x=2$ için

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ mutlak yakınsak değil. Şartlı yakınsak mı?

$a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ $\to$ $a_n>0$ ✓, $a_{n+1}<a_n$ ✓, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ✓ } Alterne seri testine göre seri şartlı yakınsaktır.

M.Yakınsak: $x\in(2,4)$
Ş. Yakınsak: $x=2$
} Yakınsaklık Aralığı $=[2,4)$

Iraksak : $\mathbb{R}-[2,4)$