Pınar Albayrak
3. Uygulama

⊛ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ serisinin toplamı?

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$ olduğunu biliyoruz.

↓ Türev

$\sum_{k=1}^{\infty} k.x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$

↓ x ile çarp

$\sum_{k=1}^{\infty} k.x^{k} = \frac{x}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$

$x=\frac{1}{2}$ ise $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = \underline{\underline{2}}$

⊛ $I=\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ için bir kuvvet serisi temsili bulunuz.

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$

$$I = \int_0^x \frac{1-\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\cdots\right)}{t^2}\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2!} - \frac{t^2}{4!} + \frac{t^4}{6!} - \cdots\right) dt$$

$$= \frac{t}{2!} - \frac{t^3}{3.4!} + \frac{t^5}{5.6!} - \cdots \Big|_0^x = \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{3.4!} + \frac{x^5}{5.6!} - \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n+1}}{(2n+1).(2n+2)!}$$

(x) $\int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt$ için kuvvet seri temsili bulunuz.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots \Rightarrow e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \cdots$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-t^2} = t^2 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \cdots$$

$$\int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt = \int_0^x \frac{t^2 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} \cdots}{t^2}\,dt$$

$$= \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{3!} - \frac{t^6}{4!} + \cdots\right) dt$$

$$= t - \frac{t^3}{3.2!} + \frac{t^5}{5.3!} - \frac{t^7}{7.4!} + \cdots \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3.2!} + \frac{x^5}{5.3!} - \frac{x^7}{7.4!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1).(n+1)!}$$

(x) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^2}$ limitini seri açılımları yardımıyla hesaplayın.

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+\cancel{x^2}-\cancel{1}-\cancel{x^2}-\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}\cdots}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\underbrace{\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} \cdots\right)}_{0} = 0$$

Sevgili MAT2 Öğrencileri,

Özellikle son 10 gündür yoğun bir şekilde, genelde aynı isteği/soruları içeren, mailler alıyorum. Bazen art arda o kadar çok mail geliyor ki her maile tek tek dönmem çok zor oluyor. Bunu yapmaktan hiç hoşlanmasam da gözden kaçırdığım, dönüş yapamadığım mailler oluyor; dönüş yapmadığım öğrenciler beni affetsin lütfen :(Sorulan sorular genelde aynı olduğundan hepsini bu şekilde cevaplayayım istedim.

Gelelim sorulan sorulara ve cevaplarıma:

Dönem başından beri en sık aldığım mail: **dersime misafir olmak isteyen öğrencilerin grup numaramı/sınıflarımı sorduğu mailler**. Bu maillere bilinçli bir şekilde dönmüyorum, olumsuz cevap yazmaktan çok hoşlanmıyorum çünkü. Ama çok fazla mail gelince ve daha da geleceğini tahmin edince cevabı bu şekilde toptan vereyim istedim. MAT2 den kalan öğrenci sayısı fazla olduğu için, fark ettiğiniz üzere, sınıf öğrenci mevcutları kalabalık bu dönem. Benim sınıflarım da çok kalabalık ve ne mutlu ki devam zorunluluğu olmayan öğrencilerim dahi düzenli olarak derse geliyorlar. Bu sebeple; sağlıklı bir ortamda ders yürütebilmek ve kendi öğrencilerimi mağdur etmemek için, **uygulama dersleri dahil**, misafir öğrenci kabul etmeyeceğim sınıfıma; çok üzgünüm.

İkinci soru: MAT2 konularından hiçbir şey anlamıyorum/zorlanıyorum, nasıl/hangi kitaptan çalışmalıyım? Özel bir kitap önermiyorum, ders notlarınız yeter bence. Dersi düzenli bir şekilde takip etmek çok önemli MAT2 de. Sadece ders takibi de yetmez, MAT2 düzenli çalışma da isteyen bir ders. Son gece çalışmasıyla yapılabilecek bir ders değil. İş sizde bitiyor kısaca. Eğer düzenli bir şekilde çalışır, bolca soru çözer, ezberlemeye değil işin mantığını kavramaya çalışırsanız aslında konuların hiç de zor olmadığını fark edeceksiniz. Bireysel çalışma dışında arkadaş grubu ile çalışmayı da alışkanlık edinin. Birinizin anlamadığını diğeriniz anlamıştır belki, eksikleri bu şekilde tamamlarsınız. Ve emin olun birine ders anlatmak o dersi tam anlamıyla öğrenmenin en güzel yoludur. Ayrıca tavsiyem: Soruların cevaplarına bakarak çalışmayın; gözünüzle değil, cevaplara bakmadan, elinize kalem alarak, düşünerek çözün soruları. Bolca çalışın, başka diyeceğim yok :) Düzenli çalışana çok kolay, çalışmayana çok zor bir ders MAT2; ortası yok :)

Üçüncü soru: MAT1 almadım/DGS geçişliyim Mat2'yi yapabilir miyim, neleri bilmem gerekiyor? Temel türev, integral ve limit bilgisi işinizi görür. Bu konulardaki eksiğinizi kapatırsanız çok zorlanmadan geçersiniz Mat2'yi emin olun. 2017 girişli öğrenciler lisede Ters Trigonometrik fonksiyonları görmedikleri için ekstra zorlanıyorlar gördüğüm kadarı ile ; bu sebeple bir de Ters Trigonometrik Fonksiyonlara çalışmanızı tavsiye ederim.

Ayrıca **Makine, Mekatronik, Endüstri, Gemi İnşaat Müh.** okuyan öğrencilere tavsiyem şudur ki güzelce çalışıp **ilk alışta geçin** Davutpaşa'dan aldığınız servis derslerini (fizik+kimya+matematik). Asıl bölümünüz Yıldızda olduğu için sonraki senelerde derslere gelmiyor/gelemiyor ve haliyle geçmekte daha da çok zorlanıyorsunuz. Yaptığımız mezuniyet sınavlarına giren öğrencilerin büyük çoğunluğunu Yıldız Kampüsünde okuyan öğrenciler oluşturuyor. "İlk alışta önemsemedik kaldık, sonra da kuyruk gibi peşimizden sürükledik bu dersleri" diyor pek çoğu sınav sonrası konuştuğumuzda. Bu yüzden, düşük notla da olsa, ilk alışta geçin kurtulun bu derslerden. Canınız notunuzu yükseltmek isterse daha sonra tekrar alıp almayacağınızı düşünürsünüz. Benden söylemesi :)

Aldığım sorulara cevaplarım/tavsiyelerim bu şekilde. Umarım aklında bu sorular olan öğrenciler için de faydalı olur. Ayrıca bilmeyenler için: **bu dönem ders notlarımı Avesis sayfama yüklüyorum**; notlarımı oradan takip edebilirsiniz.

Hepinize yeni dönemde başarılar dilerim,

Sevgiler,
Pınar ALBAYRAK

⊛ $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\operatorname{Arctan}x^2}\right)$ limitini seri açılımları ile hesaplayın.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\operatorname{Arctan}x^2}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{Arctan}x^2}{x(x+\operatorname{Arctan}x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{5}x^{10}-\dots}{x^2+x\left(x^2-\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{5}x^{10}-\dots\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x^2}(1\overbrace{-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{5}x^8-\dots}^{0})}{\cancel{x^2}(1\underbrace{+x-\frac{1}{3}x^5+\frac{1}{5}x^9+\dots}_{0})}=\underline{\underline{1}}$$

⊛ $\ln x$ fonksiyonunun Taylor polinomunun ilk 4 terimini kullanarak $\ln(1{,}2)$ için yaklaşık bir değer bulun.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln x \\ f'(x)=\frac{1}{x} \\ f''(x)=-\frac{1}{x^2} \\ f'''(x)=\frac{2}{x^3}\end{array}\right\} \begin{array}{l} a=1 \\ f(1)=0 \\ f'(1)=1 \\ f''(1)=-1 \\ f'''(1)=2 \end{array}$$

$$f(x)\approx f(1)+f'(1).(x-1)+f''(1).\frac{(x-1)^2}{2!}+f'''(1).\frac{(x-1)^3}{3!}=P_3(x)$$

$$f(1{,}2)=\ln(1{,}2)\approx 0+1.(1{,}2-1)+(-1).\frac{(1{,}2-1)^2}{2}+2.\frac{(1{,}2-1)^3}{3!}=0{,}2-\frac{1}{2}.(0{,}2)^2+\frac{(0{,}2)^3}{3!}$$

$$=\underline{0{,}182}$$

⊛ $\frac{x}{(1-x)^2}$ fonksiyonu için bir kuvvet serisi temsili elde ediniz ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1<x<1) \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

↓ Türev

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1)$$

↓ x ile çarp

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n.x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1)}$$

⊛ $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ için bir kuvvet serisi temsili ve geçerli olduğu aralığı bulunuz.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x|<1) \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

↓ $x \to -x-1$

$$\frac{1}{1-(-x-1)} = \frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x-1)^n \quad (|-x-1|<1 \Rightarrow |x+1|<1)$$

↓

$$\frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.(1+x)^n \quad (|x+1|<1)$$

↓ Türev

$$-\frac{1}{(x+2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.n.(1+x)^{n-1} \quad (|x+1|<1)$$

↓

$$\frac{1}{(x+2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.n.(1+x)^{n-1} \quad (-2<x<0)$$

(*) $|x|<1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$ serisinin toplamını bulup bu toplam yardımı ile $\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $|x|<1$ olduğunu biliyoruz.

$\downarrow x = x^2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \qquad -1<x<1$$

$\downarrow x$ ile çarp

$$\underline{\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}} = \frac{x}{1-x^2} \qquad (-1<x<1) \qquad \text{(1)}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}}_{=} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

$x = \frac{1}{2}$ için (1)'i kullanırsak:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

$\circledast$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \cdot x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Kök Testi ile:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot |x| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e}} \cdot |x| = \frac{|x|}{e} < 1$$

$\Downarrow$

$|x| < e$

$\Downarrow$

Yakınsaklık Yarıçapı $= R = e$

$\circledast$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3.6.9\ldots 3n} x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Oran Testi ile:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(n+1)!}^{\,n+1} \cdot \cancel{x^{n+1}}^{\,x}}{\cancel{3.6.9\ldots 3n}.(3n+3)} \cdot \frac{\cancel{3.6.9\ldots 3n}}{\cancel{n!}\ \cancel{x^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n+1}{3n+3}}_{\frac{1}{3}} \cdot |x| = \frac{|x|}{3} < 1$$

$|x| < 3$

$\Downarrow$

$R = 3$

$\circledast$ $A = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = ?$

I. Yol

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{a=\frac{1}{2} \quad r=\frac{1}{2} \quad \text{Geometrik Seri}} = \underset{n=1}{\frac{1}{2}} + \underset{n=2}{\frac{1}{2^2}} + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{A} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$\Downarrow$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + A = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}}$

II. Yol

$$A = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \frac{1}{2^3} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{a=1 \quad r=\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \,// \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}}$$

$n \to n+2$ dönüşümü ile

Geometrik seri $\quad a/1-r$

(*) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+2}$ serisinin yakınsadığı fonksiyonu ve bu yakınsamanın gerçekleştiği aralığı bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$ olduğunu biliyoruz.

$\downarrow x^2$ ile çarp

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x}$ $(-1<x<1)$

$\downarrow$ Türev al

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1} = \frac{2x.(1-x)+x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$

$\downarrow x$ ile çarp

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\, x^{n+2} = \frac{2x^2-x^3}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1)}$$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve bu aralıkta temsil ettiği fonksiyonu bulunuz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{3}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{x+2}{3}\right)$ Geometrik Seri

$r = \frac{x+2}{3}$ $a = \frac{x+2}{3}$

Bu seri $|r| = \left|\frac{x+2}{3}\right| < 1$ için yani $|x+2|<3 \Rightarrow \boxed{-5<x<1}$ için yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{3}\right)^n = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{x+2}{3}}{1-\frac{x+2}{3}} = \frac{x+2}{1-x}$ $(-5<x<1)$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n} = \frac{x+2}{1-x} \quad (-5<x<1)}$$

(*) $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$ serisinin toplamını ve yakınsaklık aralığını bulup bu seri yardımıyla $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4^n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$ olduğunu biliyoruz.

$\downarrow x\to x^2$ yaz

$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$ $(-1<x<1)$

$\downarrow x$ ile çarp

$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{1-x^2}$ $(-1<x<1)$

$\downarrow$ Türev al

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1).x^{2n}=\frac{1-x^2+2x.x}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\quad(-1<x<1)} \;*$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2}=\frac{20}{9}$$

(*) da $x=\frac{1}{2}$ yazarsak

(*) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b^n.x^n}{\ln n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının 3 olması için b nin alacağı değerleri bulun. (2016-Final sorusu)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b^{n+1}.x^{n+1}}{\ln(n+1)}\cdot\frac{\ln n}{b^n x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\ln n}{\ln(n+1)}}_{\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(n+1)}=1}.|b|.|x|=|b|.|x|<1$$

$\Rightarrow |x|<\frac{1}{|b|}$ olmalı

O halde $R=\frac{1}{|b|}$ dir.

$R=3\Rightarrow\frac{1}{|b|}=3\Rightarrow|b|=\frac{1}{3}\Rightarrow b=\mp\frac{1}{3}$

⊛ $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun Maclaurin serisinden faydalanarak $L(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,dt$ fonksiyonunun Maclaurin Serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$f(x)=\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \cos t^2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^{4n}}{(2n)!} \quad (-\infty<t<\infty)$$

$(-\infty<x<\infty)$

$$L(x)=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^{4n}}{(2n)!}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^{4n+1}}{(4n+1).(2n)!}\Bigg|_0^x \quad (-\infty<t<\infty)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{(4n+1).(2n)!} \quad (-\infty<x<\infty)$$

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-100)^n}{n!}$ serisinin yakınsaklık türünü belirleyin.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-100)^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(100)^n}{n!}$$

① $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(100)^n}{n!}$ mutlak yakınsak mı? $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(100)^n}{n!}$ yakınsak mı?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(100)^{n+1}}{\underbrace{\cancel{(n+1)!}}_{n+1}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{(100)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{100}{n+1}=0<1 \Rightarrow$$

Oran Testine göre $\sum\frac{(100)^n}{n!}$ yakınsak.

O halde $\sum\frac{(-100)^n}{n!}$ mutlak yakınsaktır.

(*) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ limitini kuvvet serilerini kullanarak hesaplayınız.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^3}{3!} + \cancel{\frac{x^4}{4!}} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) - \left(\cancel{1} - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2!}} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - \cancel{2x}}{\cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + \cdots}{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{2}{3!} + \overbrace{\frac{2x^2}{5!} + \cdots}^{0}\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{3!} + \underbrace{\frac{x^2}{5!} + \cdots}_{0}\right)} = \underline{\underline{2}}$$

(*) $y = xe^{-x}$ fonksiyonunun seriye açılımından yararlanarak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot 2^{n+1}$ alterne serisinin toplamını bulunuz.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \Rightarrow e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!} + \cdots$$

$$y = x \cdot e^{-x} = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n!}$$

$x = 2$ alırsak

$$2 \cdot e^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot 2^{n+1} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n+1}}{n!} = \frac{2}{e^2}}$$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+3^n \cdot n}$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → Harmonik Seri Iraksak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{1+n3^n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 3^n}{1+n3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{n3^n}}_{0}} = 1 \neq 0$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+n3^n}$ ıraksak

(*) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{1-\cos x}-1}{\sin^2 x}$ limitini fonksiyonların kuvvet seri temsillerinden faydalanarak bulunuz.

$$1-\cos x = 1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots\right) = \frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\dots$$

$$e^{1-\cos x} = 1+(1-\cos x)+\frac{(1-\cos x)^2}{2!}+\dots = 1+\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}-\dots\right)^2+\dots$$

$$e^{1-\cos x}-1 = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+\dots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}-\dots\right)^2+\dots$$

$$\sin^2 x = \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right)^2 = x^2\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots\right)^2$$

$$e^{1-\cos x}-1 = x^2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2!}+\dots\right)+\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{4!}+\dots\right)^2+\dots}_{0}\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\cos x}-1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\left[\left(\frac{1}{2}-\overbrace{\frac{x^2}{2!}+\dots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{4!}-\dots\right)^2+\dots}\right]}{\cancel{x^2}\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots\right)^2}_{0}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi 2015-2016 Bahar Dönemi-Bütünleme Sınavı Soru ve Cevap Kâğıdı		NOT TABLOSU				
		1. S	2.S	3.S	4.S	TOPLAM
Adı Soyadı						
Öğrenci No	Grup No					
Bölümü		Sınav Tarihi	20/06/2016			
Dersin Adı	MAT1072 MATEMATİK 2	Süre	100dk	Derslik		
Öğr. Üye. Adı Soyadı		İmza				

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

1-a) $L(x)=\int_0^x \cos(t^2)dt$ fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz. Serinin ilk 2 terimini kullanarak $L(0.1)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.*(12 Puan)*

$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \; -\infty<x<+\infty$ $\quad \cos(t^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{4k}}{(2k)!}$ (2)

$$L(x)=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{4k}}{(2k)!}\right)dt=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\int_0^x t^{4k}dt}_{(3)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{t^{4k+1}}{4k+1}\Big|_0^x\right)$$

$$L(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{x^{4k+1}}{4k+1} \quad (2)$$

$$L(0.1)\cong\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{(0.1)^{4k+1}}{4k+1}=\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\frac{1}{10^5.5}=\frac{1}{10}-\frac{1}{10^6}=0,0999 \quad (5)$$

1-b) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$ serisinin mutlak yakınsak, şartlı yakınsak ıraksak olup olmadığını belirleyiniz.*(13 Puan)*

$a_n=(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$. $\sum|a_n|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ integral testi uygulanabilir.

$f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ pozitif, sürekli, azalan $x\geq 2$ için.

$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{du}{u}=\lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^{b}\frac{du}{u}=\infty \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ Iraksaktır,

$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$ serisi de mutlak yakınsak değildir (5)

Alternatif Seri Testi (AST) $u_n=\frac{1}{n\ln n}$, $u_n>0$ $n\geq 2$ (1)

. $n\ln n<(n+1)\ln(n+1) \Rightarrow u_{n+1}<u_n$ (2)

. $\lim_{n\to\infty} u_n\to 0$ (2)

Tüm AST koşulları sağlandığından $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)\frac{1}{n\ln n}$ şartlı yakınsar (1).

Buradan ⇒ seri yakınsaktır Ancak mutlak yakınsak değil şartlı yakınsaktır denir (2)

(13)

(25)

Pınar Albayrak

40

	YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi, Sınav Soru ve Cevap Kağıdı				NOT TABLOSU				
					1. S	2. S	3. S	4. S	TOPLAM
Adı Soyadı									
Öğrenci Numarası		Grup No							
Bölümü					Sınav Tarihi		13/06/2013		
Dersin Adı	0251322 MATEMATİK II (Bütünleme)		Sınav Süresi	95dk	Sınav Yeri				
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı					İmza				

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

1- $\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k \quad , \quad |x|<1$ ifadesinden yararlanarak $f(x)=x\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$ fonksiyonunu temsil eden kuvvet serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k \quad ; \quad |-x^2|<1$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k.x^{2k} \quad ; \quad |x|<1$$

10

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k.\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad ; \quad |x|<1$$

$x=0$ için $c=0$ bulunur.

10

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad ; \quad |x|<1$$

$$\arctan\frac{x}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k.\frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}.(2k+1)} \quad ; \quad \left|\frac{x}{2}\right|<1$$

$$x.\arctan\frac{x}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k.\frac{x^{2(k+1)}}{2^{2k+1}.(2k+1)} \quad ; \quad |x|<2$$

5

14

Pınar Albayrak

25

3. $|x|<1$ için $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ kuvvet serisinden yararlanarak $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(n+1)x^{n+1}$ serisinin toplamını ve $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n(n+1)}{2^{n+1}}$ serisinin yakınsadığı değeri bulunuz.

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k.\,x^k \quad ; \quad |x|<1 \qquad 2$$

$$-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k.\,k.\,x^{k-1} \quad ; \quad |x|<1 \qquad 4$$

$$\frac{2}{(1+x)^3}=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k.\,k.\,(k-1).\,x^{k-2} \quad ; \quad |x|<1 \qquad 4$$

$$\frac{2x^2}{(1+x)^3}=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k.\,k.\,(k-1).\,x^{k} \quad ; \quad |x|<1 \qquad 4$$

olup, $k-1=n$ dönüşümü ile

$$\frac{2x^2}{(1+x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\,n.(n+1).\,x^{n+1}$$ bulunur. 4

$x=\frac{1}{2}$ için 3 $$\frac{2.\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{n.(n+1)}{2^{n+1}}$$ 4

olup, serinin yakınsadığı değer $\frac{4}{27}$ dir.

15

2) a) $-1 < x < 1$ için $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x - x^3$, $f_3(x) = x - x^3 + x^5$, $f_4(x) = x - x^3 + x^5 - x^7, \ldots$ şeklinde bir $f_n(x)$ dizisi bir sonsuz serinin kısmi toplamlar dizisi olarak verilsin. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ limitini sonsuz serinin toplamı olarak bulunuz. (12p)

$f_n(x) = x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1} = x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1} + \cdots$$

$-x^2 \quad -x^2 \quad -x^2$

Geometrik Seri

$a = x \quad r = -x^2$

Bu seri $|r| = |-x^2| < 1$ yani $-1 < x < 1$ için yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{x}{1-(-x^2)} = \frac{x}{1+x^2} \quad (-1 < x < 1)$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^4 + \ln n}$ serisinin karakterini belirleyiniz. (13p)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{n^4 + \ln n}$ mutlak yakınsak mı? $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + \ln n}$ yakınsak mı?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\begin{array}{c} p = 2 > 1 \\ \text{yakınsak} \end{array} \right)$ seçelim.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^4 + \ln n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4 + \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^4}^{\,1}}{\cancel{n^4}\left(1 + \underbrace{\frac{\ln n}{n^4}}_{0}\right)} = 1 \neq 0, \infty$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{4n^3} = 0 \right)$$

Limit testine göre iki seri aynı karakterlidir.

Yani $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + \ln n}$ yakınsaktır. O halde $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2}{n^4 + \ln n}$ mutlak yakınsaktır.

16

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi **Sınav Soru ve Cevap Kağıdı**			**NOT TABLOSU**				
			1. S	**2. S**	**3.S**	**4.S**	**TOPLAM**
Adı Soyadı							
Öğrenci Numarası		**Grup No**					
Bölümü				**Sınav Tarihi**		**06/04/2013**	
Dersin Adı	**MATEMATİK II**		**Sınav Süresi**	**90 dk**	**Sınav Yeri**		
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı				**İmza**			

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[6x^5\sin(\frac{1}{x})-6x^4+x^2]$ limitini seri açılımlarından faydalanarak çözünüz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3\,3!} + \frac{1}{5!\,x^5} - \dots$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[6x^5.\sin\frac{1}{x} - 6x^4 + x^2\right] = \lim_{x\to\infty}\left[6x^5\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3!x^3} + \frac{1}{5!x^5} - \frac{1}{7!x^7}\dots\right] - 6x^4 + x^2$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\cancel{6x^4} - \cancel{x^2} + \frac{1}{20} - \frac{6}{7!}\cdot\frac{1}{x^2}\dots\right] - \cancel{6x^4} + \cancel{x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{20} - \underbrace{\frac{6}{7!}\cdot\frac{1}{x^2} + \dots}_{0}\right] = \boxed{\frac{1}{20}}$$

67

Başarılar...

Soru 2. a) $f(x)=Cosx$ fonksiyonunun Maclaurin serisinden faydalanarak $L(x)=\int_0^x Cos\left(t^2\right)dt$ fonksiyonunun Maclaurin serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$-\infty<x<\infty$ aralığında $Cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, $Cos(t^2)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{4k}}{(2k)!}$, $-\infty<t<\infty$

$$L(x)=\int_0^x Cos(t^2)\,dt=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{4k}}{(2k)!}\right)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^k t^{4k}}{(2k)!}\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\int_0^x t^{4k}\,dt$$

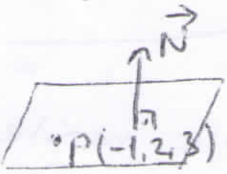
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{t^{4k+1}}{4k+1}\right|_0^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot\frac{x^{4k+1}}{4k+1},\ -\infty<x<\infty$$

Veya
Yakınsaklık aralığı:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\underbrace{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{4k+1}{4k+5}\cdot\frac{1}{(2k+2)(2k+1)}\right|}_{0}\cdot|x^4|<1 \text{ den}$$

Y.A: $-\infty<x<\infty$

b) $P(-1,2,3)$ noktasından geçen ve $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ ile $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{k}$ vektörlerine paralel olan düzlemin denklemini yazınız.



$\vec{u}$ ve $\vec{v}$, $\vec{N}$ vektörüne dik olacağından $\vec{N}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ olur.

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -3\end{vmatrix}=-6\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$$

Düzlemin herhangi bir noktası $P'(x,y,z)$ olmak üzere $\vec{PP'}$ vektörü düzlemin normal vektörüne dik olacağından $\vec{PP'}\cdot\vec{N}=0$ dan düzlemin denklemi

$$-6(x+1)+3(y-2)-4(z-3)=0$$

$$-6x+3y-4z=0 \quad \text{olur.}$$

17

22

* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^{n+1}}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve temsil ettiği fonksiyonu bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n-1}}{\underbrace{\frac{3^n}{3.3^{n-1}}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{3}}_{a}\Big(\underbrace{\frac{x+2}{3}}_{r}\Big)^{n-1}$$

$a=\frac{1}{3}$

$r=\frac{x+2}{3}$

Geometrik seri

$|r|=\left|\frac{x+2}{3}\right|<1$ ise seri yakınsaktır

$\Downarrow$

$-3<x+2<3 \Rightarrow \boxed{-5<x<1}$ Yak. aralığı

Seri bu aralıkta $\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{x+2}{3}}=\frac{1}{1-x}$ 'e yakınsar.

---

* Genel terimi: $a_n=\frac{n^2}{2n+1}.\sin\left(\frac{3}{n}\right)$ olan dizinin limiti?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n+1}.\sin\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{3n}{2n+1}}_{\frac{3}{2}} . \underbrace{\frac{\sin\frac{3}{n}}{\frac{3}{n}}}_{1} = \frac{3}{2}$$

---

* Genel terimi: $a_1=\frac{2}{3}$, $a_{n+1}=\frac{2(n+1)}{3n}.a_n$ ile verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakteri?

Oran Testi ile: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{3n}=\frac{2}{3}<1$

Oran Testine göre Seri yakınsak

(*) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}.\cos n\pi$ serisinin yakınsaklığını araştırınız. Yakınsak ise toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}.\cos n\pi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{e}\right)^{n-1} \qquad \left.\begin{array}{l} a=1 \\ r=-\frac{1}{e} \end{array}\right\} \text{Geometrik Seri}$$

$|r| = \frac{1}{e} < 1$ olduğundan seri yakınsaktır.

$$\text{Toplamı} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{e}\right)} = \underline{\underline{\frac{e}{e+1}}}$$

(*) $\sum_{k=0}^{\infty} (k^2+3k+2)\, x^{k+3}$ serisinin yakınsadığı fonksiyonu ve bu yakınsamanın gerçekleştiği aralığı bulunuz.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k^2+3k+2)\, x^{k+3} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)\, x^{k+3}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (-1<x<1)$ olduğunu biliyoruz.

$\downarrow x^2$ ile çarp

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2} = \frac{x^2}{1-x} \quad (-1<x<1)$$

$\downarrow$ Türev al

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\, x^{k+1} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1)$$

$\downarrow$ Türev

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\, x^{k} = \frac{2}{(1-x)} \quad (-1<x<1)$$

$\downarrow x^3$ ile çarp

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\, x^{k+3} = \frac{2x^3}{(1-x)} \qquad (-1<x<1)}$$