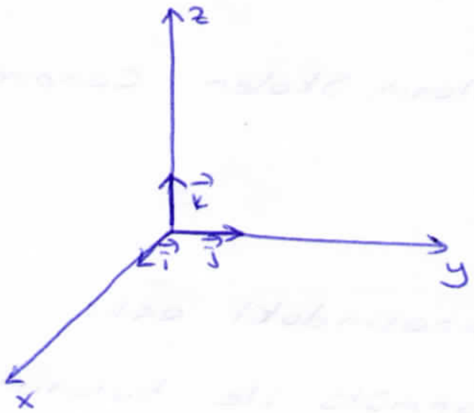
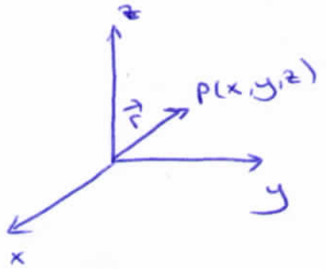
3-Boyutlu Uzayda Vektörler



3-boyutlu uzayda bir kartezyen koordinat sistemi verildiğinde, sırasıyla orjinden (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) noktalarına olan, oklarla temsil edilen üç standart baz vektörü $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ olarak tanımlanır.

3-boyutlu uzaydaki herhangi bir vektör bu baz vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

☆ Örneğin (x,y,z) noktasının yer vektörü:



$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ile verilir. $\vec{r}$ vektörünün uzunluğu:

$|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ dir.

☆ $P_1(x_1,y_1,z_1)$ ve $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 3-boyutlu uzayda iki nokta ise P_1'den P_2'ye olan $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ vektörü:

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \langle x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 \rangle = (x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j} + (z_2-z_1)\vec{k}$$

olarak tanımlanır.

☆ $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, α: sabit

a) $\vec{u} \mp \vec{v} = (u_1 \mp v_1)\vec{i} + (u_2 \mp v_2)\vec{j} + (u_3 \mp v_3)\vec{k}$ c) $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \alpha\vec{v}$ dir.

b) $\alpha . \vec{u} = \alpha u_1\vec{i} + \alpha u_2\vec{j} + \alpha u_3\vec{k}$

<u>Birim vektör</u>: Uzunluğu 1 olan vektöre <u>birim vektör</u> denir. Her vektörün kendi doğrultu ve yönünde birim vektörü vardır. $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ için:

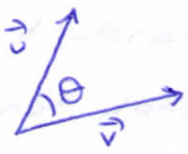
$\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \vec{v}$ vektörü $\vec{u}$ yönünde ve doğrultusunda olan birim vektördür.

Skaler Çarpım

$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ ve $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ vektörleri için skaler çarpım:

$\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ olarak tanımlanır. Skaler çarpımın sonucu bir sayıdır.

✱ İki vektör arasındaki açı:



$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki açı:

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$ formülü ile bulunur.

✱ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise $\vec{u}.\vec{v} = 0$ dır. ($\vec{u} \perp \vec{v}$ dir)

✱ Skaler Çarpımın Özellikleri:

① $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

② $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

③ $t.(\vec{u}.\vec{v}) = (t.\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(t.\vec{v})$

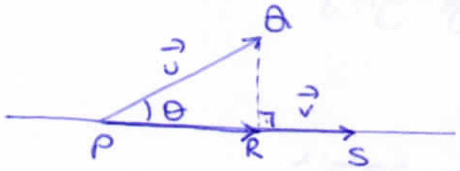
④ $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$

⑤ $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v} = 0$

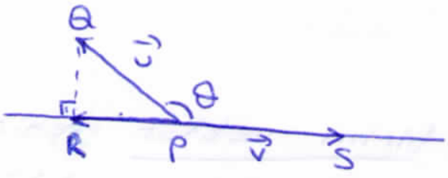
⑥ $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$

⑦ $\vec{0}.\vec{u} = \vec{0}$

✱ Vektör İzdüşümleri



$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ vektörünün, sıfırdan farklı $\vec{v} = \overrightarrow{PS}$ vektörüne izdüşümü: Q'dan PS doğru parçasına dik bir çizgi çizilmesiyle elde edilen $\overrightarrow{PS}$ vektörüdür. Bu vektör $proj_v u$ (u'nun v'ye izdüşümü) ile gösterilir. $proj_v u$:



$|\vec{u}|.\cos\theta = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|} \Rightarrow \vec{u}$ vektörünün $\vec{v}$ yönündeki skaler bileşeni denir.

$$proj_v u = (|\vec{u}|.\cos\theta).\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$= \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|}.\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

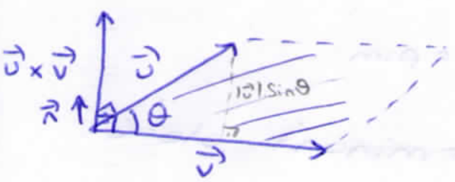
$$= \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right).\vec{v}$$ formülü ile bulunur.

Vektörel Çarpım

★ Skaler çarpım $\mathbb{R}^n$ de geçerlidir; fakat vektörel çarpım sadece $\mathbb{R}^3$ de geçerlidir.

★ İki vektörün skaler çarpımı sonucu bir <u>sayı</u>; vektörel çarpımı sonucu bir <u>vektör</u> oluşur.

★ Vektörel çarpım $\mathbb{R}^3$ deki vektörleri çarpmanın diğer bir yoludur.



$A = h.|\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.Sin\theta$

$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.Sin\theta$

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri paralel değilse bir <u>düzlem</u> belirlerler. $\vec{u}\times\vec{v}$ vektörü bu düzleme ve dolayısıyla $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerine <u>diktir</u>. $|\vec{u}\times\vec{v}|$ taralı bölgenin alanına eşittir.

★ $\vec{n}$, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ ye dik olan birim vektör olmak üzere

$\vec{u}\times\vec{v} = (|\vec{u}|.|\vec{v}|.Sin\theta).\vec{n}$ dir. (θ: $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ arasındaki açı)

$\left.\begin{array}{l}\theta = 0 \\ \text{veya} \\ \theta = \pi\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u}\times\vec{v} = 0$ dır. Yani $\vec{u} \parallel \vec{v}$ ise vektörel çarpımları 0 dır.

Vektörel Çarpımın Özellikleri:

$\vec{u}$, $\vec{v}$ birer vektör; r, s skaler olsun.

① $(r\vec{u})\times(s\vec{v}) = (rs)(\vec{u}\times\vec{v})$

② $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$

③ $0\times\vec{u} = \vec{u}\times 0 = 0$

④ $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v}) + (\vec{u}\times\vec{w})$

⑤ $(\vec{v}+\vec{w})\times\vec{u} = \vec{v}\times\vec{u} + \vec{w}\times\vec{u}$

★ ⑥ $\left.\begin{array}{l}(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{u} = 0 \\ (\vec{u}\times\vec{v}).\vec{v} = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u} \\ \vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{v}\end{array}$

⑦ $\vec{u}$, $\vec{v}$ ve $\vec{u}\times\vec{v}$ sağ el kuralı ile belirlenen bir üçlü oluşturur.

⑧ $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.Sin\theta$

Vektörel Çarpım için Determinant formülü

$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ olsun.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

Karışık Çarpım

Herhangi $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ vektörleri için $\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})$ büyüklüğüne $\vec{u}$, $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörlerinin karışık çarpımı denir. Bu çarpım:

$$\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

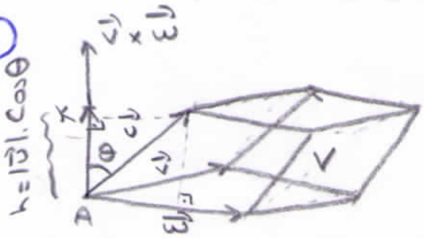
formülü determinant olarak hesaplanabilir.

Özellikleri:

① $\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}.(\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w}.(\vec{u} \times \vec{v})$

② $\vec{u}(\vec{v} \times \vec{w}) = -\vec{u}.(\vec{w} \times \vec{v})$

③ $\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ ise vektörler aynı düzlemdedir.

④ 

$$V = h.S = \underbrace{|\vec{u}|.|\cos\theta|}_{\text{Yükseklik}}.\underbrace{|\vec{v} \times \vec{w}|}_{\text{Taban Alanı}} = |\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})|$$

★ $\vec{u}$, $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ ile oluşturulmuş paralel yüzlünün hacmi $|\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})|$ dur.

⊛ $P(-3,4,1)$, $Q(-5,2,2)$, $R(1,1,1)$ noktaları verilsin.

a) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ vektörlerini;

b) $\overrightarrow{PQ}$ vektörünün uzunluğunu;

c) $\overrightarrow{PQ}$ yönündeki birim vektörü;

d) $\overrightarrow{PQ}$ ve $\overrightarrow{QR}$ vektörleri arasındaki açıyı;

e) $\overrightarrow{PQ}$ nun $\overrightarrow{QR}$ üzerine izdüşümünü;

f) $\overrightarrow{PQ}$ ve $\overrightarrow{QR}$ ye dik olan bir vektör; bulunuz.

Çözüm

a) $\overrightarrow{PQ} = \langle -5-(-3), 2-4, 2-1 \rangle = \langle -2,-2,1 \rangle = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

$\overrightarrow{QR} = \langle 1-(-5), 1-2, 1-2 \rangle = \langle 6,-1,-1 \rangle = 6\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

b) $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2} = 3$

c) $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \dfrac{-2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}}{3} = \langle -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \rangle$

d) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = \langle -2,-2,1 \rangle \cdot \langle 6,-1,-1 \rangle = -2.6 + 2.1 - 1.1 = -12+2-1 = -11$

$\overrightarrow{QR} = \sqrt{6^2+1^2+1^2} = \sqrt{38}$

$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{PQ}|.|\overrightarrow{QR}|} = \dfrac{-11}{3.\sqrt{38}} \Rightarrow \theta = \text{ArcCos}\left(\dfrac{-11}{3\sqrt{38}}\right)$

e) $\text{Proj}_{\overrightarrow{QR}}\overrightarrow{PQ} = \left(\dfrac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QR}|^2}\right)\overrightarrow{QR} = \dfrac{-11}{38} \cdot \langle 6,-1,-1 \rangle = \langle -\frac{66}{38}, \frac{11}{38}, \frac{11}{38} \rangle$

f) $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= 3\vec{i} + 4\vec{j} + 14\vec{k}$

✱ 1. Vize buraya kadar :) Sınavlarınızda başarılar dilerim...

Sevgiler