⊛ $f(x,y)=x^2-xy+y^2-y$ olsun. Aşağıdaki şartlarda $\vec{u}$ yönlerini ve $D_uf\big|_{(1,-1)}$ değerlerini bulunuz:

a) $D_uf\big|_{(1,-1)}$ en büyük   b) $D_uf\big|_{(1,-1)}$ en küçük

c) $D_uf\big|_{(1,-1)}=0$

$\nabla f=\langle 2x-y,-x+2y-1\rangle \quad \nabla f\big|_{(1,-1)}=\langle 3,-4\rangle$

a) $D_uf\big|_{(1,-1)}$ en büyük $\nabla f\big|_{(1,-1)}=\langle 3,-4\rangle$ yönünde olur.

$\vec{u}=\langle \frac{3}{5},-\frac{4}{5}\rangle$ dir. $D_uf\big|_{(1,-1)}=|\nabla f|=5$ tir.

b) $D_uf\big|_{(1,-1)}$ en küçük $\nabla f\big|_{(1,-1)}=\langle 3,-4\rangle$ ün ters yönünde olur.

$\vec{u}=\langle -\frac{3}{5},\frac{4}{5}\rangle$ dir. $D_uf\big|_{(1,-1)}=-|\nabla f|=-5$ tir.

c) $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ olsun. $\vec{u}$ birim vektör olduğundan $a^2+b^2=1$

$D_uf\big|_{(1,-1)}=0 \Rightarrow \langle a,b\rangle\langle 3,-4\rangle=0 \Rightarrow 3a-4b=0 \Rightarrow a=\frac{4}{3}b$

$\frac{16}{9}b^2+b^2=1$

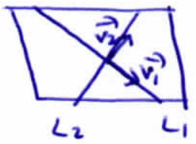
$\frac{25b^2}{9}=1 \quad b=\mp\frac{3}{5}$

$\vec{u}$

$a=\mp\frac{4}{5}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{u}_1=-\frac{3}{5}\vec{j}+\frac{4}{5}\vec{i}\\ \vec{u}_2=\frac{3}{5}\vec{j}+\frac{4}{5}\vec{i}\end{array}}$$

(*) $L_1: x=-1+t,\ y=2+t,\ z=1-t$
$L_2: x=1-4s,\ y=1+2s,\ z=2-2s$ } doğrularının belirlediği düzlemi bulunuz.



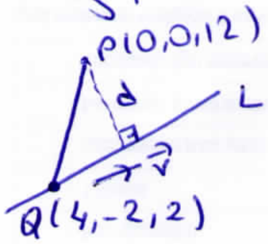
$\vec{v_1}=\langle 1,1,-1\rangle$
$\vec{v_2}=\langle -4,2,-2\rangle$ } Düzlemin normali $\vec{v_1}$ ve $\vec{v_2}$ ye diktir.

$$\vec{n}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ -4 & 2 & -2\end{vmatrix}=\langle \underset{A}{0}, \underset{B}{6}, \underset{C}{6}\rangle$$

$(\underset{x_0}{-1},\underset{y_0}{2},\underset{z_0}{1}) \rightarrow L_1$ üzerinde, dolayısıyla düzlem üzerinde bir noktadır.

$$6.(y-2)+6(z-1)=0 \Rightarrow \boxed{6y+6z=18}$$

(*) $P(0,0,12)$ noktasının, $L: x=4t,\ y=-2t,\ z=2t$ doğrusuna uzaklığı?



$t=1 \Rightarrow x=4,\ y=-2,\ z=2 \rightarrow Q(4,-2,2)$

$\vec{QP}=\langle -4,2,10\rangle$

$\vec{v}=\langle 4,-2,2\rangle$

$$d=|\vec{QP}|.\sin\theta=\frac{|\vec{QP}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{QP}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 2 & 10\\ 4 & -2 & 2\end{vmatrix}=\langle 24,48,0\rangle$$

$|\vec{QP}\times\vec{v}|=24\sqrt{5}$

$|\vec{v}|=\sqrt{16+4+4}=\sqrt{24}$

$$d=\frac{24\sqrt{5}}{\sqrt{24}}=\sqrt{120}=2\sqrt{30}$$

(*) $f(x,y)=2xy-3y^2$ fonksiyonunun $P_0(5,5)$ noktasındaki $\vec{u}=\langle 4,3\rangle$ vektörü yönündeki türevini bulunuz.

$\nabla f = 2y\vec{i}+(2x-6y)\vec{j}$ $\qquad \nabla f\big|_{P_0} = 10\vec{i}-20\vec{j}$

$\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\langle \frac{4}{5},\frac{3}{5}\rangle$ $\qquad (D_u f)_{P_0} = \nabla f\big|_{P_0}\cdot\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \langle 10,-20\rangle\cdot\langle \frac{4}{5},\frac{3}{5}\rangle$

$= 8-12$

$= \underline{\underline{-4}}$

(*) $f(x,y)$ fonksiyonunun $P_0(1,2)$ de $\vec{i}+\vec{j}$ yönünde türevi $2\sqrt{2}$; $-2\vec{j}$ yönünde türevi -3 ise f in $-\vec{i}-2\vec{j}$ yönündeki türevi nedir?

$\nabla f = f_x\vec{i}+f_y\vec{j} \rightarrow \nabla f\big|_{P_0} = f_x\big|_{P_0}\vec{i}+f_y\big|_{P_0}\vec{j}$ $\qquad f_x\big|_{P_0}=a \quad f_y\big|_{P_0}=b$ olsun.

f'in $\underbrace{\vec{i}+\vec{j}}_{\vec{v}}$ yönünde türevi $2\sqrt{2}$ ise: $(a\vec{i}+b\vec{j})\cdot\overbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right)}^{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}=2\sqrt{2}$

$\Downarrow$

$\boxed{a+b=4}$

f in $\overbrace{-2\vec{j}}^{\vec{w}}$ yönünde türevi -3 ise: $(a\vec{i}+b\vec{j})\cdot\overbrace{(-\vec{j})}^{\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}}=-3$

$-b=-3 \Rightarrow \boxed{b=3}$

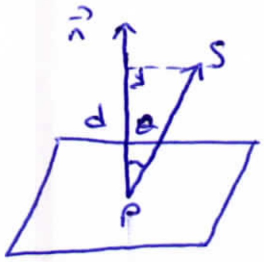
$a=1$

$a=f_x\big|_P=1 \quad b=f_y\big|_P=3 \quad \Rightarrow \boxed{\nabla f\big|_{P_0}=\vec{i}+3\vec{j}}$

f in $\underbrace{-\vec{i}-2\vec{j}}_{\vec{u}}$ yönündeki türevi: $\nabla f\big|_{P_0}\cdot\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\langle 1,3\rangle\cdot\langle -\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\rangle$

$=\boxed{\dfrac{-7}{\sqrt{5}}}$

(*) $S(2,-3,4)$ noktasının $x+2y+2z=13$ düzlemine uzaklığı?



$y=z=0 \Rightarrow x=13 \Rightarrow P(13,0,0)$ düzlemde

$\vec{n}=\langle 1,2,2\rangle$

$$d=|\vec{PS}|.\cos\theta=|\vec{PS}|.\frac{\vec{PS}.\vec{n}}{|\vec{PS}|.|\vec{n}|}=\frac{\vec{PS}.\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$\vec{PS}=\langle -11,-3,4\rangle$

$\vec{PS}.\vec{n}=-11-6+8=-9 \qquad |\vec{n}|=3$

$d=\frac{-9}{3}=-3 \Rightarrow d=|-3|=\underline{\underline{3}}$

(*) $\vec{u}=6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ vektörünün $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$ vektörüne izdüşümünü bulunuz.

$$\text{Proj}_v u=\left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v} \qquad \vec{u}.\vec{v}=6-6-4=-4$$

$|\vec{v}|=3$

$$=\frac{-4}{9}.\langle 1,-2,-2\rangle$$

$$=\left\langle -\frac{4}{9},+\frac{8}{9},\frac{8}{9}\right\rangle$$

$\circledast$ $f(x,y)=x^2y+e^{xy}\sin y$ fonksiyonunun $P_0(1,0)$ da en hızlı artan ve en hızlı azalan olduğu yönleri bulunuz.

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}=\left(2xy+ye^{xy}\sin y\right)\vec{i}+\left(x^2+xe^{xy}\sin y+e^{xy}\cos y\right)\vec{j}$$

$$\nabla f\Big|_{(1,0)}=2\vec{j}$$

En hızlı artarken olmalı. ($\vec{u}$: birim vektör)

$$\Downarrow$$
$$\boxed{\vec{u}=\vec{j}}$$

En hızlı azalırken $\vec{u}$ ile ∇f ters yönlü olmalı. $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{u}=-\vec{j}}$

$\circledast$ $f(x,y,z)=xy+yz+xz$, $P(1,-1,2)$, $\vec{u}=3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$ $\Rightarrow$ $(D_u f)_P=?$

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$=\langle y+z,\ x+z,\ y+\cancel{x}\rangle \qquad \nabla f\Big|_P=\langle 1,3,0\rangle$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left\langle \frac{3}{7},\frac{6}{7},-\frac{2}{7}\right\rangle \longrightarrow (D_u f)_P=\nabla f\Big|_P\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\langle 1,3,0\rangle\left\langle \frac{3}{7},\frac{6}{7},-\frac{2}{7}\right\rangle$$

$$=\frac{3}{7}+\frac{18}{7}=\underline{\underline{3}}$$

Soru 2-a) $y \neq 0$ olmak üzere $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y} - yz$ ile verilen f fonksiyonunu gözönüne alalım. f, en hızlı olarak P(4,1,1) de hangi yönlerde değişir ve bu yönlerdeki değişim oranları (hızları) nedir? (13 P)

$$\nabla f = \left\langle \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} - z, -y \right\rangle$$

$$\nabla f\big|_P = \langle 1, -5, -1 \rangle \quad ; \quad \left|\nabla f\big|_P\right| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Fonksiyon en hızlı olarak $\nabla f = \vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$ yönünde artar ve en hızlı olarak $-\nabla f$ yönünde azalır.

Bu yönlerde değişim oranları (hızları) sırasıyla

$|\nabla f| = 3\sqrt{3}$ ve $-|\nabla f| = -3\sqrt{3}$ dür.

Soru 2-b) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^4 + y^2}$ ile verilen f fonksiyonu için –eğer mevcut ise, $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ değerlerini bulunuz. (14 P)

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h^4 + 0} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h^{1/3} = 0 .$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 + h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{1/3}} \quad \text{yok}$$

2016-final

2-a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n x^n}{\ln n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının 3 olması için, b sabitinin alacağı değer(ler)i bulunuz.(12 Puan)

Genel terim $a_n = \frac{b^n \cdot x^n}{\ln n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b^{n+1}x^{n+1}}{\ln(n+1)}\cdot\frac{\ln n}{b^n \cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left|\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right|}_{1}|b|.|x|$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1 \qquad \Rightarrow |b|.|x| < 1$$

$$|x| < \frac{1}{|b|}$$

yakınsaklık yarıçapı 3 olması için $|b| = \frac{1}{3}$ olmalıdır

$$b = \mp\frac{1}{3} \ //$$

2-b) f fonksiyonu; $f(x,y) = xy$, $x>0, y>0$ ile tanımlanıyor. $f(x,y)=1$ seviye eğrisini, t parametresine göre parametrize ediniz. Bu parametrizasyonu kullanarak; $t=2$ değerine karşılık gelen noktada, seviye eğrisinin teğet vektörünün, ∇f gradyent vektörüne dik olduğunu gösteriniz. (13 Puan)

$xy = 1, \quad x>0, \quad y>0$

$x = t \Rightarrow y = \frac{1}{t}, \quad t>0$

$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{1}{t}\vec{j}, \quad t>0$

Teğet vektör: $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{i} - \frac{1}{t^2}\vec{j}$

$t=2$ için $\frac{d\vec{r}(2)}{dt} = \vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j}$

$\nabla f\big|_{t=2} = \frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j}$

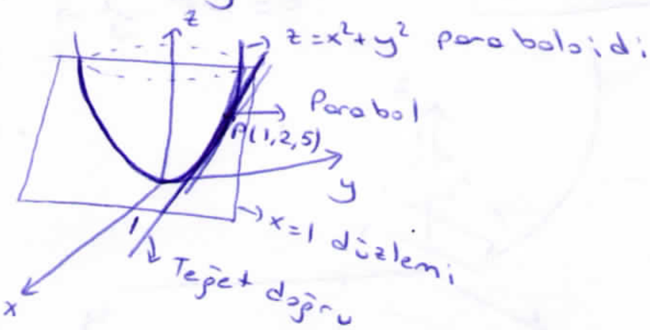
$\nabla f\big|_{t=2} \perp \frac{d\vec{r}(2)}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\vec{r}(2)}{dt} \cdot \nabla f\big|_{t=2} = 0$

$-\frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}\cdot 2 = 0 \ //$ O halde $\nabla f\big|_{t=2} \perp \frac{d\vec{r}(2)}{dt}$

(*) $x=1$ düzlemi $z=x^2+y^2$ paraboloidi ile bir parabolde kesişmektedir. $(1,2,5)$ noktasında parabolün teğetinin eğimini bulunuz.

Sorulan eğim $(1,2,5)$ noktasındaki $\frac{\partial z}{\partial y}$ kısmi türevinin değerine eşittir.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y \qquad m=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2,5)}=\underline{\underline{4}}$$



(*) $\vec{r}(t)=\mathrm{Sin}t\,\vec{i}+(t^2-\mathrm{Cos}t)\vec{j}+e^t\vec{k}$ eğrisinin $t=0$ daki teğet doğrusunun parametrik denklemleri?

$\vec{r}(t)=\mathrm{Sin}t\,\vec{i}+(t^2-\mathrm{Cos}t)\vec{j}+e^t\vec{k} \Rightarrow \vec{r}'(t)$ Teğet vektör

$\vec{r}'(t)=\mathrm{Cos}t\,\vec{i}+(2t+\mathrm{Sin}t)\vec{j}+e^t\vec{k} \to \vec{r}'(0)=1\vec{i}+0\vec{j}+1\vec{k}=\langle \overset{a}{1},\overset{b}{0},\overset{c}{1}\rangle \to$ $t=0$ daki teğet doğruya paralel vektör

$t=0$ için $\left\{\begin{array}{l} x=\mathrm{Sin}t \\ y=t^2-\mathrm{Cos}t \\ z=e^t \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \to x_0 \\ y=-1 \to y_0 \\ z=1 \to z_0 \end{array}$

$x=x_0+at=t$

$y=y_0+bt=-1$

$z=z_0+ct=1+t$

$\left(\begin{array}{l} x=t \\ y=-1 \\ z=1+t \end{array}\right) \to$ $t=0$ daki teğet doğru

---

(*) $\vec{r}(t)=\ln t\,\vec{i}+\frac{t-1}{t+2}\vec{j}+t\ln t\,\vec{k}$ eğrisinin $t=1$ deki teğet doğrusu?

$\vec{r}'(t)=\frac{1}{t}\vec{i}+\frac{t+2-t+1}{(t+2)^2}\vec{j}+(\ln t+1)\vec{k} \to \vec{r}'(1)=\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}+\vec{k} \to$ Teğet doğruya paralel

$\left.\begin{array}{l} x=\ln t \\ y=\frac{t-1}{t+2} \\ z=t\ln t \end{array}\right\} t=1 \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \to x_0 \\ y=0 \to y_0 \\ z=0 \to z_0 \end{array}$

$\vec{r}'(1)=\vec{v}=\langle \overset{a}{1},\overset{b}{\frac{1}{3}},\overset{c}{1}\rangle$

$x=x_0+at=t$

$y=y_0+bt=\frac{t}{3}$

$z=z_0+ct=t$

$\left(\begin{array}{l} x=t \\ y=\frac{t}{3} \\ z=t \end{array}\right) \to$ $t=1$ deki Teğet doğru

YTÜ - II. VİZE Sınav Soru ve Cevap Kağıdı			NOT TABLOSU				
			1. S	2. S	3. S	4. S	TOPLAM
Adı Soyadı							
Öğrenci Numarası		Grup No					
Bölümü			Sınav Tarihi	13.05.2017			
Dersin Adı	MAT1072 MATEMATİK II	Sınav Süresi	90dk	Sınav Yeri			
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı			İmza				

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan *"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"* fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

S. 1-a) $\vec{r}(t) = (1+t^2)^{3/2}\vec{i} + (3-t^2)^{3/2}\vec{j} + (4t^2)\vec{k}$ eğrisinin $-1 \le t \le 1$ aralığında kalan kısmının (yay) **uzunluğunu**, belirli integral ile hesaplayınız. (13 P)

$$\vec{r}\,'(t) = \langle 3t\sqrt{1+t^2},\ -3t\sqrt{3-t^2},\ 8t \rangle$$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{9t^2(1+t^2)+9t^2(3-t^2)+64t^2} = 10|t|$$

$$S = \int_{-1}^{1} \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = 10\int_{-1}^{0} -t\,dt + 10\int_{0}^{1} t\,dt$$

$$= 5[-t^2\Big|_{-1}^{0} + 5t^2\Big|_{0}^{1} = 10 \text{ birim}$$

11-13

S. 1-b) Uzayda, zamana bağlı olarak hareket eden bir cismin konum fonksiyonu

$$\vec{r}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + (t\sqrt{3})\vec{k}$$

ile veriliyor. Cismin, konum fonksiyonu ile ivmesi arasındaki **açı**, ne zaman $\frac{2\pi}{3}$ olur? (12 P)

$$\vec{r}\,'(t) = \langle -\sin t, \cos t, \sqrt{3} \rangle$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = \langle -\cos t, -\sin t, 0 \rangle$$

$$-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{\langle \cos t, \sin t, \sqrt{3}t \rangle \cdot \langle -\cos t, -\sin t, 0 \rangle}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 3t^2}\cdot\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}}$$

$$= \frac{-\cos^2 t - \sin^2 t}{\sqrt{1+3t^2}} \Rightarrow \sqrt{1+3t^2} = 2$$

$$\Rightarrow 1+3t^2 = 4$$

$$\Rightarrow t = \mp 1$$

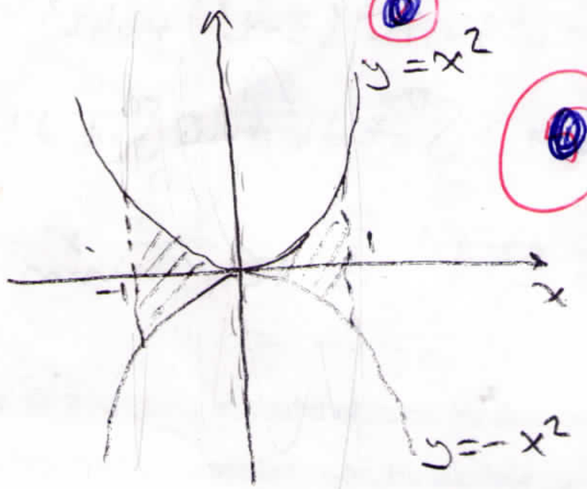
S. 2-a) $f(x,y)=\arccos\left(\dfrac{y}{x^2}\right)+\ln(1-x^2)$ ile verilen f fonksiyonunun **tanım kümesini** bulunuz.

(Şekil çizilecek) (15 P)

$z_1 = \arccos\dfrac{y}{x^2} \Rightarrow \cos z_1 = \dfrac{y}{x^2}$

$-1 \le \cancel{\sin} z_1 \le 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \neq 0 \\ -1 \le \dfrac{y}{x^2} \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \neq 0 \\ -x^2 \le y \le x^2 \end{array}\right\}$

$z_2 = \ln(1-x^2)$, $1-x^2>0$ olmalı $\Rightarrow -1<x<1$



S. 2-b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sqrt{1+3x^2y^2}-2}{xy-1}$ limitini hesaplayınız. (10 P)

$$L = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\left(\sqrt{1+3x^2y^2}-2\right)\left(\sqrt{1+3x^2y^2}+2\right)}{(xy-1)\left(\sqrt{1+3x^2y^2}+2\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{3(x^2y^2-1)}{(xy-1)\left(\sqrt{1+3x^2y^2}+2\right)} \quad (xy\neq 1)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{3(xy+1)}{\sqrt{1+3x^2y^2}+2} = \frac{3}{2}$$

II. Yol $y=mx$ için

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\ln(1+mx)}{(1+m^2)x.x} \overset{L'H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{m}{1+mx}}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$ → L. YOK

S. 3-a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot\ln(1+y)}{x^2+y^2}$ limitinin varlığını araştırınız. (10 P)

x-ekseni boyunca, $y=0$ olup,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x.\ln(1+y)}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x.\ln 1}{x^2+0^2} = 0$$

olmasına rağmen, $y=x$ doğrusu boyunca,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x.\ln(1+y)}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x.\ln(1+x)}{x^2+x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{2x}$$

$$\overset{L}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \neq 0$$

olduğundan, limit YOK.

S. 3-b) Eğer mevcut ise, $f(x,y)=\sin\left(\sqrt{x^2+y^4}\right)$ ile verilen f fonksiyonu için $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ değerlerini (f nin (0,0) noktasında x ve y ye göre 1.mertebe **kısmi türevlerini**) bulunuz. (15 P)

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\sqrt{h^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin|h|}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{\sin(-h)}{h} = -1 \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1 \end{cases}$$

olduğundan, $f_x(0,0)$ YOK.

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\sqrt{h^4}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin h^2}{h^2}.h\right) = 0 //$$

S. 4-a) f, birinci mertebe kısmi türevleri mevcut (sabit olmayan) iki değişkenli bir fonksiyon ve $z=f(x,y)$ olsun. Eğer $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ dönüşümü yapılırsa,

$$y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

denkleminin alacağı şekli bulunuz. (12 P)

1.YOL $\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot(r\cos\theta)$

$$=-y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0 //$$

2.YOL $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\arctan\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{x}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{y}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$0=y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xy}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{y^2}{r^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}-\frac{xy}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$=-\frac{\partial z}{\partial \theta} //$$

S. 4-b) Kabul edelim ki z, x ve y nin sabit olmayan bir fonksiyonudur ve $\varphi(2x-z^2,y-\frac{1}{3}z^3)=0$ denklemi ile kapalı olarak tanımlanmıştır. Bu takdirde gösteriniz ki,

$$\frac{\partial z}{\partial x}+z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}$$

dir. (13 P)

g, türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere

1.YOL $y-\frac{z^3}{3}=g(2x-z^2)$ ve $F(x,y,z)=g(2x-z^2)+\frac{1}{3}z^3-y$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2g'(2x-z^2)}{-2z\cdot g'(2x-z^2)+z^2}\quad 2$$

$(z-2g'(2x-z^2)\neq 0)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-1}{-2z\cdot g'(2x-z^2)+z^2}\quad 2$$

$F_z \to 2$

$F_x \to 2$

$F_y \to 2$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\ \ 2 =\frac{-2g'(2x-z^2)+z}{z[-2g'(2x-z^2)+z]}=\frac{1}{z} //$$

1

4b)

2. YOL : (Bence en kolayı bu yol :))

$\varphi \to u,v \to x,y,z$

$F(x,y,z) = \varphi(u,v) \qquad u = 2x - z^2, \quad v = y - \frac{1}{3}z^3$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi_u \cdot 2 + \varphi_v \cdot 0 = 2\varphi_u \quad 2$$

$$F_y = \varphi_u \cdot 0 + \varphi_v \cdot 1 = \varphi_v \quad 2$$

$$F_z = \varphi_u(-2z) + \varphi_v(-z^2) = -2z\varphi_u - z^2\varphi_v \quad 2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} = \frac{2\varphi_u}{z(2\varphi_u + z\varphi_v)} \quad 2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y}{F_z} = \frac{\varphi_v}{z(2\varphi_u + z\varphi_v)} \quad 2 \end{aligned}\right\}$$

$$z_x + z z_y = \frac{2\varphi_u + z\varphi_v}{z(2\varphi_u + z\varphi_v)} \quad 2$$

$$= \frac{1}{z} \; // \quad 1$$

3. YOL : $\varphi(u,v) = 0 \quad , u = 2x - z^2, \quad v = y - \frac{1}{3}z^3$

$$\to \varphi_u(2 - 2z z_x) + \varphi_v(-z^2 z_x) = 0 \quad 3$$

$$\Rightarrow z_x = \frac{2\varphi_u}{2z\varphi_u + z^2\varphi_v} \quad 2$$

$F = \varphi \to u,v \to x,y,z$

$$\to \varphi_u(-2z z_y) + \varphi_v(1 - z^2 z_y) = 0 \quad 3$$

$$\Rightarrow z_y = \frac{\varphi_v}{2z\varphi_u + z^2\varphi_v} \quad 2$$

$$\to z_x + z z_y = \frac{2\varphi_u + z\varphi_v}{z(2\varphi_u + z\varphi_v)} = \frac{1}{z} \; // \quad 2 \quad 1$$