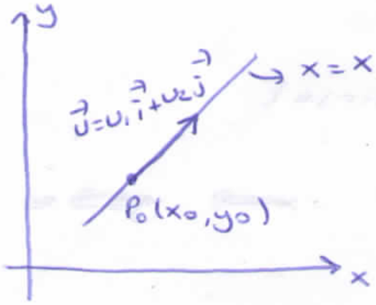
Yönlü Türev



$\rightarrow x=x_0+u_1 s\ ,\ y=y_0+u_2 s$ doğrusu

$P_0(x_0,y_0)$ noktasında, $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ birim vektörü yönünde $f(x,y)$ fonksiyonunun türevi, limitin mevcut olması halinde

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{u,P_0}=(D_u f)_{P_0}=\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,\ y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s}$$ dır.

$\left.\begin{array}{l} f_x(x_0,y_0)\rightarrow f \text{ in } \vec{i} \text{ yönündeki} \\ f_y(x_0,y_0)\rightarrow f \text{ in } \vec{j} \quad \text{''} \end{array}\right\}$ yönlü türevleridir.

Ⓧ Yönlü türev tanımı ile $P_0(1,2)$ noktasında $f(x,y)=x^2+yx$ fonksiyonunun $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ vektörü yönündeki türevini hesaplayın.

$$(D_u f)_{P_0}=\lim_{s\to 0}\frac{f\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}s,\ 2+\frac{1}{\sqrt{2}}s\right)-f(1,2)}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}s\right)^2+\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}s\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}s\right)-3}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\frac{5}{\sqrt{2}}s+s^2}{s}=\lim_{s\to 0}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+s\right)=\underline{\underline{\frac{5}{\sqrt{2}}}}$$

Gradyent Vektör

f(x,y) fonksiyonunun gradyent vektörü:

$\text{Grad}\,f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$ dür.

Yönlü Türev: Eğer $f(x,y)$, $P_0(x_0,y_0)$ içeren bir bölgede türevlenebilir ise; f'in P_0 daki $\vec{u}$ birim vektörü yönündeki türevi

$(D_u f)_{P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \vec{u}$ formülü ile hesaplanır. $x = x_0 + su_1$, $y = y_0 + su_2$

$f \to x,y \to s$ $\quad \left(\frac{df}{ds}\right)_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} = f_x \cdot u_1 + f_y \cdot u_2 = \nabla f \cdot \vec{u}$

Ⓔ $f(x,y) = xe^y + \cos xy$ nin (2,0) noktasındaki $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ yönündeki türevi?

$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$ $\qquad \nabla f = (e^y - y\sin xy)\vec{i} + (xe^y - x\sin xy)\vec{j}$

$\nabla f\big|_{(2,0)} = \vec{i} + 2\vec{j}$

$(D_u f)_{(2,0)} = \left(\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}\right)(\vec{i} + 2\vec{j})$

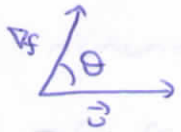
$= \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1$

NOT: $z = f(x,y)$ nin $(D_u f)_{P_0}$ türevi:

1. $\vec{u}$ yönünde P_0 daki yönlü türev
2. " " " artış hızı / oranı
3. " " " azalış hızı / oranı
4. " " " değişim oranı anlamlarına gelir.

Yönlü Türevin Özellikleri

$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\theta = |\nabla f| \cdot \cos\theta$



① $\cos\theta = 1$ yani $\theta = 0$ olduğunda f fonksiyonu en hızlı şekilde artar (en büyük yönlü türev değerine ulaşır). $\vec{u}$ ile ∇f aynı yöndedir. Yani, f en çok P'deki gradyent vektörü yönünde artar. Bu yöndeki türev:

$D_u f = |\nabla f| \cdot (\cos 0) = |\nabla f|$

② Benzer şekilde, f fonksiyonu en fazla $-\nabla f$ yönünde azalır. $(\theta = 180°)$. Bu yöndeki türev:

$D_u f = |\nabla f| \cdot \cos(\pi) = -|\nabla f|$

③ $\nabla f \neq 0$ gradyenine dik olan herhangi bir $\vec{u}$ yönü f'deki sıfır değişimin yönüdür. Çünkü $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir ve

$D_u f = |\nabla f| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ dır.

---

④ $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ nin aşağıdaki durumlarda yönünü bulun.

a) $(1,1)$ de en çok artan

b) $(1,1)$ " " azalan

c) " f'deki sıfır değişimin yönleri nedir?

$\nabla f = x\vec{i} + y\vec{j}$ $\qquad \nabla f\big|_{(1,1)} = \vec{i} + \vec{j}$

a) $\vec{u}$ ile ∇f aynı yöndedir. $\vec{u} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

b) $\vec{u}$ ile ∇f ters yönlü. $\vec{u} = -\frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

c) $\vec{u} \perp \nabla f \Rightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ $\qquad \nabla f = \vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \vec{u} \cdot \nabla f = 0$

$a + b = 0 \Rightarrow a = -b$ $\qquad a = 1 \Rightarrow b = -1$

$\qquad a = -1 \Rightarrow b = 1$

$u_1 = \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} - \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}$ $\qquad \vec{u}_2 = -\frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}$

* $f(x,y)$ türevlenebilir fonksiyonunun tanım kümesinin her (x_0,y_0) noktasında, f in gradyent vektörü ∇f, (x_0,y_0) da seviye eğrisine normaldir.

ispat: $f(x,y)$ fonksiyonu $\vec{r}=g(t)\vec{i}+h(t)\vec{j}$ eğrisi boyunca sabit değer alıyorsa $f(g(t),h(t))=c$ dir. t'ye göre türev:

$f \to x,y \to t \quad \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{g'(t)}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{h'(t)}=0 \quad \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right)}_{\nabla f}\left(g'(t)\vec{i}+h'(t)\vec{j}\right)=0$

$\nabla f\cdot\vec{r}'(t)=0 \to$ Teğet $\perp \nabla f$

$\nabla f \to$ eğriye normal

Gradyenler için Cebirsel Kurallar

① $\nabla(f\mp g)=\nabla f\mp\nabla g$

② $\nabla(f.g)=g.\nabla f+f.\nabla g$

③ $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g.\nabla f-f.\nabla g}{g^2}$

3 Değişkenli fonksiyonlar

Türevlenebilir bir $f(x,y,z)$ fonksiyonu ve $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ birim vektörü için:

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$D_u f=\nabla f.\vec{u}=\frac{\partial f}{\partial x}.u_1+\frac{\partial f}{\partial y}u_2+\frac{\partial f}{\partial z}u_3$$

* Daha önce iki değişkenli fonksiyonlar için belirttiğimiz kurallar 3 değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir.

* $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$ in $P_0(1,1,0)$ noktasında $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ yönündeki türevi bulunuz. f en hızlı olarak P_0 da hangi yönde değişir? Bu yöndeki değişim oranı nedir?

$\vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{2}{7}\vec{i}-\frac{3}{7}\vec{j}+\frac{6}{7}\vec{k} \qquad \nabla f=(3x^2-y^2)\vec{i}-2xy\vec{j}-\vec{k} \qquad \nabla f\Big|_{(1,1,0)}=2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

$(D_u f)_{P_0}=\vec{u}\cdot\nabla f\big|_{P_0}=\frac{4}{7}$

Fonksiyon en hızlı $\nabla f=2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ yönünde artar, $-\nabla f$ yönünde azalır. Bu yönlerde değişim oranları:

$|\nabla f|=3 \qquad -|\nabla f|=-3$