ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

$D \neq \emptyset$ olmak üzere, $D \subset \mathbb{R}^2$ olsun. D'deki her bir (x,y) noktasına bir $z=f(x,y)$ reel sayısını eşleyen f kuralına "iki değişkenli fonksiyon" denir. D kümesine "Tanım Kümesi" (Bölgesi), $z=f(x,y)$ değerlerinin kümesine de "Değer Kümesi" denir.

İki değişkenli bir fonksiyon genel olarak $z=f(x,y)$ şeklinde gösterilir. Burada $x,y \rightarrow$ bağımsız değişkenler, z ise bu değişkenlere bağlı değişkendir. İki değişkenli fonksiyon $F(x,y,z)=0$ şeklinde kapalı olarak da ifade edilebilir.

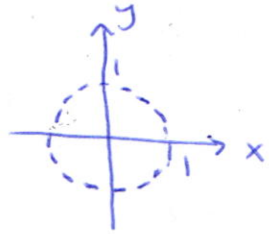
$z=f(x,y)$ fonksiyonu geometrik olarak uzayda bir yüzey üzerindeki bir noktanın z koordinatı olarak temsil edilebilir.

- Benzer şekilde $u=f(x,y,z)$; bağımsız değişkenleri x,y,z olan 3 değişkenli bir fonksiyondur.

- Genel olarak n değişkenli bir fonksiyon $u=f(x_1,\dots,x_n)$ şeklindedir.

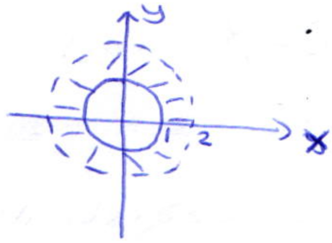
(*) $z = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulup şeklini çizin.

$1-x^2-y^2>0 \rightarrow x^2+y^2<1 \Rightarrow$



(*) $z = \sqrt{x^2+y^2-1} + \ln(4-x^2-y^2) \rightarrow$ T. Bölgesi?

$$\left.\begin{array}{lll} x^2+y^2-1 \geq 0 & \Rightarrow & x^2+y^2 \geq 1 \\ 4-x^2-y^2 > 0 & \Rightarrow & 4 > x^2+y^2 \end{array}\right\} \quad 1 \leq x^2+y^2 < 4 \quad \Rightarrow$$



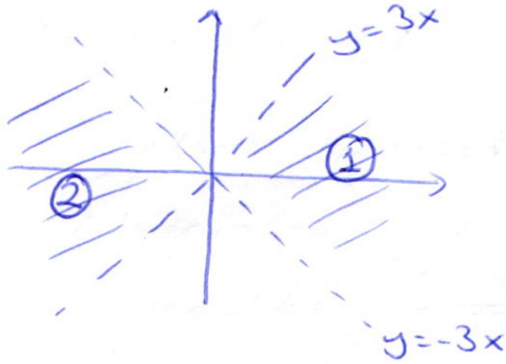
(*) $z = \dfrac{1}{\sqrt{9x^2-y^2}}$ T. Bölgesi?

$9x^2-y^2 > 0 \Rightarrow (3x-y).(3x+y) > 0$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \pm \quad\quad\quad \pm$

① $\left.\begin{array}{lll} 3x-y>0 & \Rightarrow & 3x>y \\ 3x+y>0 & \Rightarrow & y>-3x \end{array}\right] -3x<y<3x$

② $\left.\begin{array}{lll} 3x-y<0 & \Rightarrow & 3x<y \\ 3x+y<0 & \Rightarrow & y<-3x \end{array}\right] 3x<y<-3x$



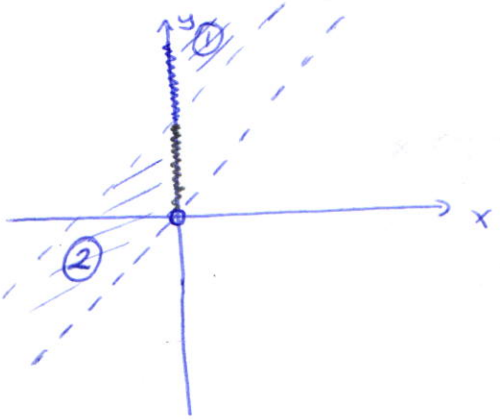
(*) $f(x,y) = \ln[x.\ln(y-x)]$ T. Bölgesi?

$x.\ln(y-x) > 0, \quad y-x>0, \quad y-x \neq 1, \quad x \neq 0$

$\pm \quad \pm$

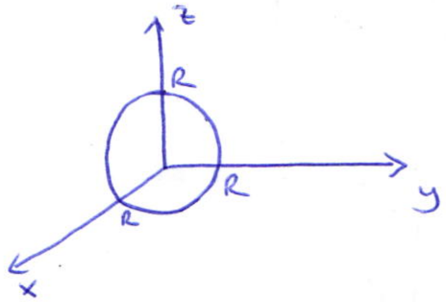
① $x>0, \ \ln(y-x)>0, \ y>x \Rightarrow x>0, \ y-x>1, \ y>x \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x>0 \\ y>x+1 \end{array}}$

② $x<0, \ \ln(y-x)<0, \ y>x \Rightarrow x<0, \ 0<y-x<1, \ y>x \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x<0 \\ x<y<x+1 \end{array}}$



TEMEL YÜZEYLER

Küre: $x^2+y^2+z^2=R^2 \Rightarrow$ Yarıçapı R olan, orjin merkezli küre

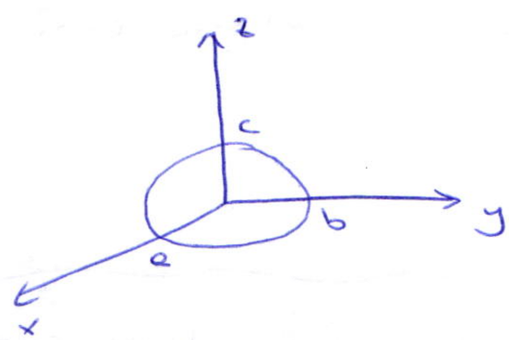


$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \Rightarrow$ Merkezi $M(a,b,c)$ noktası olan R yarıçaplı küre

---

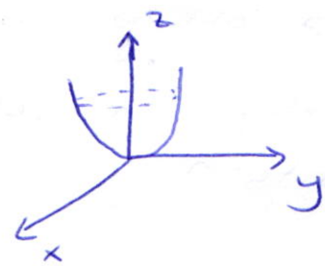
Elipsoid:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \rightarrow$ Orjin merkezli elipsoid

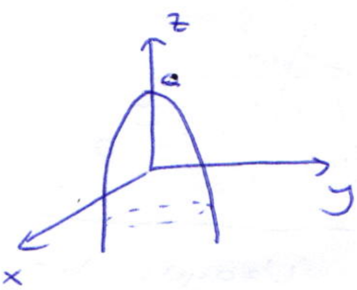


Paraboloid:

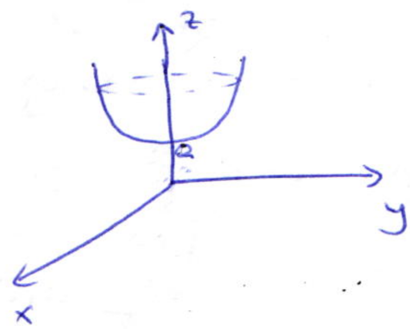
1. $z=ax^2+by^2$ $(a,b>0)$
   ⇓
   Orjin tepe noktalı, kolları yukarı paraboloid $\Rightarrow$



2. $z=a-x^2-y^2 \Rightarrow (0,0,a)$ tepe noktalı, kolları aşağı paraboloid $\Rightarrow$

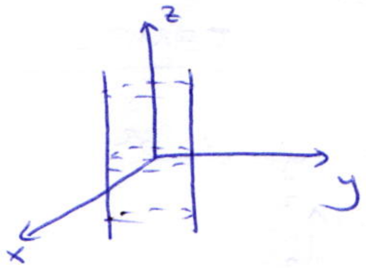


3. $z=a+x^2+y^2 \Rightarrow (0,0,a)$ tepe noktalı, kolları yukarı



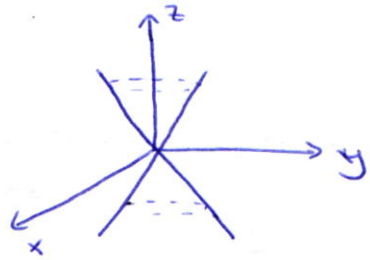
Silindir:

$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow z$ boyunca uzanan silindir $\Rightarrow$

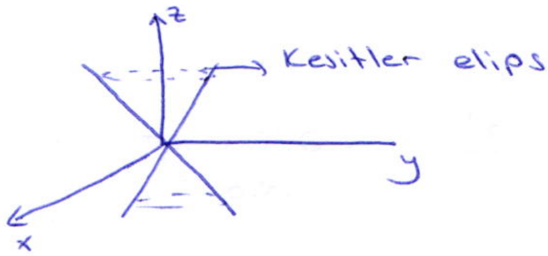


Koni:

* $x^2+y^2=z^2 \Rightarrow$ Dairesel Koni $\Rightarrow$

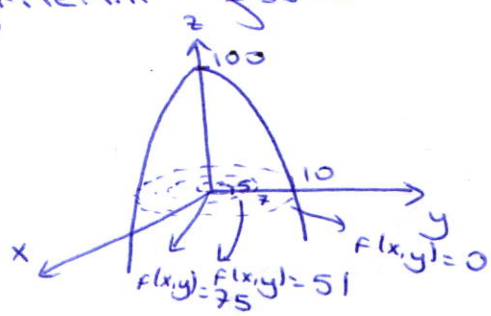


* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \Rightarrow$ Eliptik Koni $\Rightarrow$



Seviye Eğrisi: Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun bir $f(x,y)=c$ sabit değerine sahip olduğu noktaların kümesi f in seviye eğrisidir.

(*) $f(x,y)=100-x^2-y^2$ nin şeklini çizip $f(x,y)=0, 75, 51$ seviye eğrilerini gösterin.



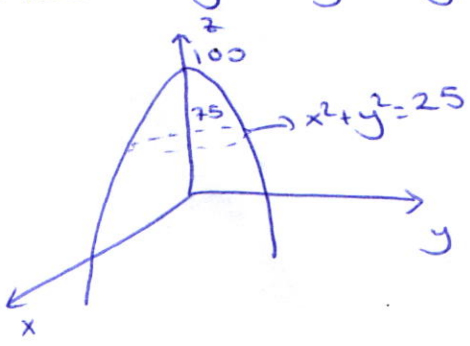
$f(x,y)=0 \Rightarrow x^2+y^2=100$ çemberi

$f(x,y)=51 \Rightarrow x^2+y^2=49$ "

$f(x,y)=75 \Rightarrow x^2+y^2=25$ "

Kontür Eğrisi: Uzayda bir $z=c$ düzleminin bir $z=f(x,y)$ yüzeyini kestiği eğri $f(x,y)=c$ değerini temsil eden noktalardan oluşur. Buna $f(x,y)=c$ kontür eğrisi denir.

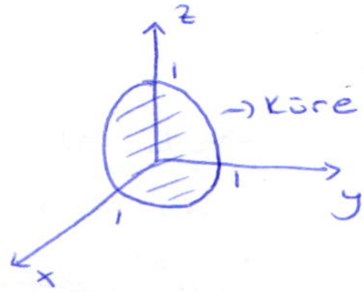
(*) $f(x,y)=100-x^2-y^2$ yüzeyinin $f(x,y)=75$ kontür eğrisi?



$\Rightarrow z=75$ düzleminde, $x^2+y^2=25$ çemberi

$\circledast$ $w=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ Tanım bölgesi?

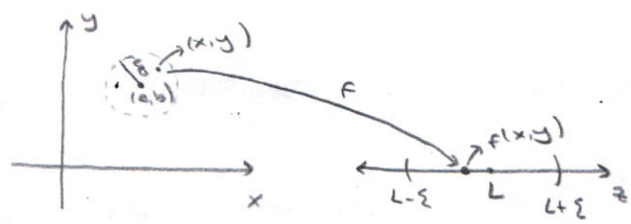
$1-x^2-y^2-z^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 1 \Rightarrow$



Limit ve Süreklilik

Her pozitif ε sayısı için, $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ iken $|f(x,y)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)$ sayısı mevcutsa $f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasındaki limiti L dir denir.

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ şeklinde gösterilir.



✱ Eğer limit varsa tektir.

✱ Tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ in varlığı x, a'ya sağdan veya soldan yaklaşırken $f(x)$ in aynı sonlu sayıya yaklaşmasını gerektirir. Benzer olarak, iki değişkenli bir fonk. için; (x,y), (a,b) ye nasıl yaklaşırsa yaklaşsın eğer $f(x,y)$ aynı L sayısına yaklaşıyorsa o zaman $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ limitine sahip olabiliriz. Özel olarak (x,y) (a,b)'ye bir eğri boyunca yaklaşabilir.

✱ $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$: Düzlemde ($\mathbb{R}^2$ de) (x,y) ve (a,b) noktaları arasındaki mesafe, $|f(x,y)-L|$ ise $f(x,y)$ ve L arasındaki mesafedir.

Limit Kuralları: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=M$ ise

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f\mp g)=L\mp M$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f}{g}=\frac{L}{M}$ $\quad (M\neq 0$ koşuluyla$)$

(*) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} 4x^2+y^3 = 4+1=5$ $\qquad$ (*) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x-y}{x+y^2}=\frac{1}{3}$

(*) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2}=0$ olduğunu gösterin.

Her $\varepsilon>0$ için $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ iken $\left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı var mı?

$$\left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{4|x|.y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{4|x|\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta$$

$4\delta=\varepsilon \Rightarrow \delta=\frac{\varepsilon}{4}>0$ bulunur. Yani $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2}=0$ dır.

(*) $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=?$

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = \underline{\underline{0}}$$

(*) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos xy}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{xy}{2}\right)}{xy}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{2}\,\overbrace{\sin\frac{xy}{2}}^{\to 1}\;\overbrace{\sin\frac{xy}{2}}^{0}}{\frac{xy}{2}.\cancel{2}} = \underline{\underline{0}}$$

Sandviç (Sıkıştırma) Teoremi

$(x,y) \neq (x_0,y_0)$ için, merkezi (x_0,y_0) da olan bir dairenin içinde $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$ ise ve $(x,y) \to (x_0,y_0)$ iken $g(x,y)$ ile $h(x,y)$ aynı L limitine yaklaşıyorlarsa o zaman

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \text{ dir.}$$

(*) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 . \sin \frac{1}{y} & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$ ile verilen $f(x,y)$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limiti hesaplayınız.

$y \neq 0$ için $-1 \leq \sin \frac{1}{y} \leq 1$ dir. O halde

$\forall x \in \mathbb{R}$ ve $y \neq 0$ için $-x^2 \leq \sin \frac{1}{y} \leq x^2$ dir.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} -x^2 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$ olduğundan Sıkıştırma Teo. göre

$$\lim x^2 . \sin \frac{1}{} = 0 \text{ dır.}$$

İki Kat Limit (Ardışık Limit):

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ için:

$\lim\limits_{x\to a}\left[\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right] = L_1$ ve $\lim\limits_{y\to b}\left[\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right] = L_2$ olsun.

a) $L_1 = L_2$ ise fonksiyonun (a,b) noktasında **iki kat limiti** vardır. (Bunu söylemek; $f(x,y)$ nin (a,b) de limite sahip olduğunu söylemeye **yetmez**.)

b) $L_1 \neq L_2$ ise fonksiyonun (a,b) de iki kat limiti yoktur. Dolayısıyla limiti **yoktur**.

Limitin Yokluğu İçin Çift Yol Testi

Eğer bir $f(x,y)$ fonksiyonunun; (x,y) noktası farklı iki yol boyunca (a,b) ye yaklaşırken farklı limitleri varsa bu durumda $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ mevcut değildir.

★ Örneğin $(0,0)$ noktasında $f(x,y)$ nin limitinin mevcut olmadığını göstermek için:

I. Yol : $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, ⋮ $\Big\}$ yolları boyunca alınan limitlerin sonucunun farklı olduğu gösterilerek limitin olmadığı söylenebilir.

II. Yol: $y=kx$ veya $y=kx^2$ veya $y=kx^3$ ... yolları boyunca alınan limitlerin sonucunun k'ya bağlı olduğu gösterilerek limitin olmadığı söylenebilir.

III. Yol: iki kat limitin olmadığı gösterilerek limitin olmadığı söylenebilir.

* $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ daki limitinin varlığını araştırınız.

$y=kx^2$ için $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2kx^2}{x^4+k^2x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2kx^4}{x^4(1+k^2)}=\dfrac{2k}{1+k^2}\rightarrow$ Sonuç k'ya bağlı limit yok

* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3x^2-y^2}{3y^2+x^2}$ limitinin varlığını araştırınız.

I. Yol: $y=kx$ için $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-k^2x^2}{3k^2x^2+x^2}=\dfrac{3-k^2}{3k^2+1}\rightarrow$ Sonuç k'ya bağlı limit yok

II. Yol: $y=x$ boyunca limit: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-x^2}{3x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}$ $\neq$

$y=x^2$ " " : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-x^4}{x^2+3x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x^2}(3-\overset{0}{x^2})}{\cancel{x^2}(1+3\underset{0}{x^2})}=3$

Limit yok!

III. Yol: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{3x^2-y^2}{3y^2+x^2}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{3x^2}{x^2}\right]=3$

$\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-y^2}{3y^2+x^2}\right]=\lim\limits_{y\to 0}\left[-\dfrac{y^2}{3y^2}\right]=-\dfrac{1}{3}$

$\neq$ iki kat limit yok. Dolayısıyla limit mevcut değil!

Süreklilik: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=f(a,b)$ ise yani:

1. fonksiyon (a,b) de limite sahip
2. fonksiyon (a,b) de tanımlı
3. (a,b) deki limit $=f(a,b)$

ise fonk. (a,b) de süreklidir.

* Bir fonksiyon tanım kümesinin her noktasında sürekli ise sürekli fonksiyondur.

* $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

$\Rightarrow$

Sürekli olması için $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ old. göstermeliyiz. (C.0.10)

Her $\varepsilon>0$ sayısı için $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ iken $\left|\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$

olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı var mı?

$$\left|\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{|x|.|x^2-y^2|}{x^2+y^2}<\frac{|x|.\cancel{|x^2+y^2|}}{\cancel{x^2+y^2}}=|x|=\sqrt{x^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$$

$\delta=\varepsilon>0$ bulunabildiğinden limit 0'dır ve fonk. süreklidir.

(*) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ fonksiyonunun (0,0) daki sürekliliğini inceleyeniz. Nedenini açıklayınız.

Fonksiyon (0,0) da tanımlıdır. ✓

$y=mx$ boyunca limit: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(mx^2)}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0} m.\underbrace{\dfrac{\sin(mx^2)}{mx^2}}_{1}.\dfrac{1}{1+m^2}$

$=\dfrac{m}{1+m^2}\to$ Sonuç m'ye bağlı limit yok!

$f(x,y)$ nin (0,0) da limiti mevcut olmadığından fonk. (0,0) da sürekli değildir.

Kısmi Türevler

$z=f(x,y)$ fonksiyonunun x ve y değişkenine göre 1. mertebe kısmi türevleri:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_1(x,y)=f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$ $\Rightarrow$ y'yi sabit düşünüp x'e göre türev alınır

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_2(x,y)=f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$ $\Rightarrow$ x'i sabit düşünüp y'ye göre türev alınır

limitlerinin mevcut olması koşulu ile $f_x(x,y)$ ve $f_y(x,y)$ fonksiyonlarıdır.