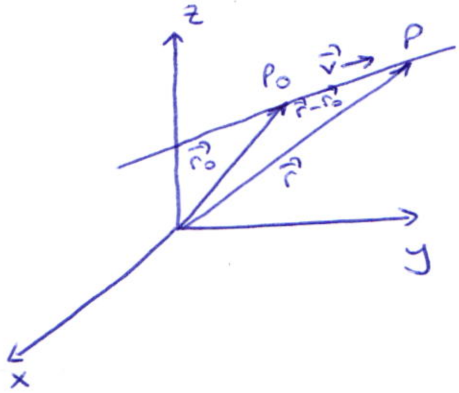
UZAYDA DOĞRULAR VE DÜZLEMLER

Uzayda Doğru ve Doğru Parçaları



$\vec{r_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ P_0 noktasının yer vektörü ve $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ sıfırdan farklı bir vektör olsun. Bu durumda P_0'dan geçen ve $\vec{v}$ ye paralel olan tek bir doğru vardır.

Eğer, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ bu doğru üzerindeki başka bir P noktasının yer vektörü ise o zaman $\vec{r} - \vec{r_0}$ bu doğru boyunca uzanır ve dolayısıyla $\vec{v}$ ye paraleldir. Bu durumda bir t reel sayısı için

$\boxed{\vec{r} - \vec{r_0} = t\vec{v}}$ olur.

☆ $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$: P_0 dan geçen ve $\vec{v}$ ye paralel olan doğrunun vektörel denklemidir. ☆

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{r_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$, $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ yazılırsa

$\boxed{x = x_0 + at \quad , y = y_0 + bt \quad , \quad z = z_0 + ct}$ elde edilir.

☆ $x = x_0 + at$
☆ $y = y_0 + bt$
$z = z_0 + ct$

} $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan geçen $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ ye paralel olan doğrunun standart parametrik denklemidir.

☆ $\vec{v}$ vektörüne doğrunun yön vektörü denir.

☆ t parametresi $(-\infty, \infty)$ aralığında değerler alır.

☆ İki doğru paralel ise yön vektörleri de paraleldir.

Bir doğru denklemini yazmak için → ① Doğru üzerinde noktaya ihtiyaç var. ② Doğruya paralel vektöre (6)

⊛ $(-2,0,4)$ den geçen $\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$ ya paralel doğru?

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0+at = -2+2t \\ y &= y_0+bt = 0+4t \\ z &= z_0+ct = 4-2t \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\begin{aligned} x &= -2+2t \\ y &= 4t \\ z &= 4-2t \end{aligned}}$$

⊛ $P(-3,2,-3)$, $Q(1,-1,4)$ den geçen doğrunun parametrik denk.?

$\vec{v}=\vec{PQ}=\langle 4,-3,7\rangle$

$$x = x_0+at = -3+4t$$
$$y = y_0+bt = 2-3t$$
$$z = -3+7t$$

İki Noktayı Birleştiren Doğru Parçasını Parametrize Etmek

① Önce bu noktalardan geçen doğru parametrize edilir

② Uç noktalar için t değerleri bulunur ve t bu değerlerle sınırlı kapalı bir aralıkta kısıtlanır.

⊛ $P(-3,2,-3)$ ve $Q(1,-1,4)$ yi birleştiren doğru parçası?

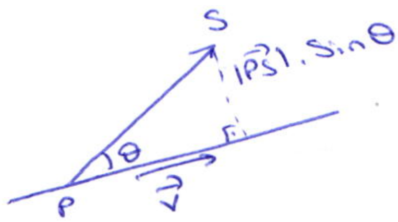
① $x=-3+4t$
$y=2-3t$
$z=-3+7t$

② $P(-3,2,-3)$ için $\left.\begin{aligned} -3 &= -3+4t \\ 2 &= 2-3t \\ -3 &= -3+7t \end{aligned}\right\} t=0$

$Q(1,-1,4)$ için $\left.\begin{aligned} 1 &= -3+4t \\ -1 &= 2-3t \\ 4 &= -3+7t \end{aligned}\right\} t=1$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -3+4t \\ y &= 2-3t \\ z &= -3+4t \\ 0 &\le t \le 1 \end{aligned}}$$

Uzaydaki Bir Noktanın Doğruya Uzaklığı



Bir S noktasının; P den geçen $\vec{v}$ ye paralel olan doğruya uzaklığı:

$$d=\frac{|\vec{PS}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|} \qquad \left(|\vec{PS}\times\vec{v}|=|\vec{PS}|.|\vec{v}|.\sin\theta\right)$$

⊛ $S(1,1,5)$ noktasının $L:\left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=3-t \\ z=2t \end{array}\right\}$ doğrusuna uzaklığı?

$x=1+t$
$y=3-t$
$z=0+2t$

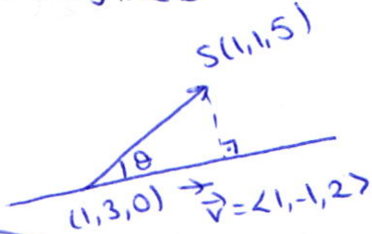
$P(1,3,0)$ $\quad \vec{v}=\langle 1,-1,2\rangle$

$\vec{PS}=\langle 0,-2,5\rangle$

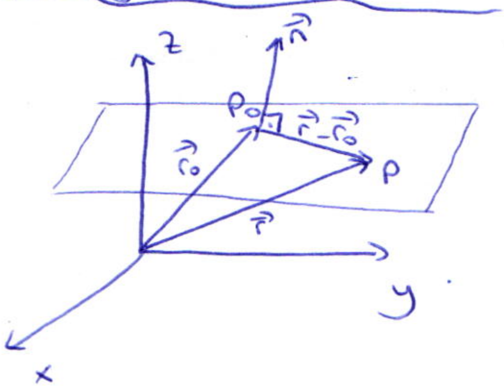
$$\vec{PS}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}$$

$|\vec{PS}\times\vec{v}|=\sqrt{1+25+4}=\sqrt{30}$ $\qquad |\vec{v}|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$

$$d=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=\underline{\underline{\sqrt{5}}}$$



Uzayda Düzlemler



$\vec{r_0}=\langle x_0,y_0,z_0\rangle$ $\quad P_0(x_0,y_0,z_0)$ noktasının yer vektörü ve $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ sıfırdan farklı bir vektör olsun.

Bu durumda P_0'dan geçen $\vec{n}$ ye dik tek düzlem vardır.

Eğer, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ düzlem üzerindeki başka bir P noktasının yer vektörü ise o zaman $\vec{P_0P}$ vektörü ile $\vec{n}$ vektörü birbirine dik olur.

$\vec{P_0P}=\vec{r}-\vec{r_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{(\vec{r}-\vec{r_0}).\vec{n}=0}$ $\Rightarrow$ P_0 dan geçen $\vec{n}$ ye dik düzlemin vektörel denklemi.

⋆ $\vec{n}$ vektörüne düzlemin normal vektörü denir.

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{r_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$, $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ yazılırsa

$\boxed{A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0}$ ⇒ P_0'dan geçen $\vec{n}$ ye dik düzlemin bileşen denklemi

$Ax + By + Cz = \overbrace{Ax_0 + By_0 + Cz_0}^{D}$ ⇒ $\boxed{Ax + By + Cz = D}$

⊛ $P_0(\underset{x_0}{-3}, \underset{y_0}{0}, \underset{z_0}{7})$ den geçen $\vec{n} = \underset{A}{5}\vec{i} + \underset{B}{2}\vec{j} \underset{C}{-} \vec{k}$ ye dik düzlem?

$5(x+3) + 2(y-0) - (z-7) = 0 \Rightarrow 5x + 2y - z = -22$

⊛ $x = (2,1,4)$ den geçen $l: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = 3 \end{cases}$ doğrusuna dik düzlem?

$\vec{v} = \vec{n}$

$\downarrow$

$x = 2+t$

$y = 1+2t$

$z = 3+0t$

$\vec{n} = \langle \underset{}{\overset{A}{1}}, \overset{B}{2}, \overset{C}{0} \rangle$

$x = (\underset{x_0}{2}, \underset{y_0}{1}, \underset{z_0}{4})$

$1.(x-2) + 2(y-1) + 0(z-4) = 0$

$\boxed{x + 2y = 4}$

⊛ $(2,0,1)$ den geçen ve $X(1,1,0)$ ve $Y(4,-1,-2)$ noktalarından geçen doğruya dik düzlem?

$\vec{n} = \overrightarrow{XY} = \langle \overset{A}{3}, \overset{B}{-2}, \overset{C}{-2} \rangle$

$(\underset{x_0}{2}, \underset{y_0}{0}, \underset{z_0}{1})$

$3(x-2) - 2(y-0) - 2(z-1) = 0$

$\boxed{3x - 2y - 2z = 4}$

⊛ $2x + y + 3z = 6$ düzleminin normalini, düzlem üzerinde bir noktayı ve eksenleri kesim noktalarını bulunuz.

* $2x + y + 3z = 6 \Rightarrow \vec{n} = \langle 2,1,3 \rangle$

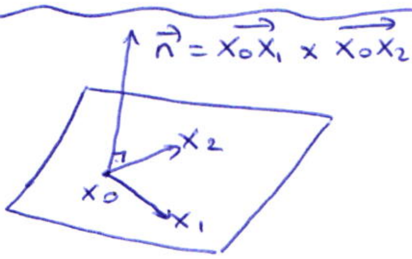
* $x = y = 1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow (1,1,1)$

* $x = y = 0 \Rightarrow z = 2$

$y = z = 0 \Rightarrow x = 3$

$x = z = 0 \Rightarrow y = 6$

3 Nokta ile Belirlenmiş Düzlemin Normali



Aynı doğru üzerinde olmayan X_0, X_1, X_2 noktalarından geçen düzlemin normali:

$$\vec{n} = \overrightarrow{X_0X_1} \times \overrightarrow{X_0X_2}$$

(*) $A(0,0,1)$, $B(2,0,0)$, $C(0,3,0)$ dan geçen düzlem?

$\overrightarrow{AB} = \langle 2, 0, -1 \rangle$. $\overrightarrow{AC} = \langle 0, 3, -1 \rangle$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} = \langle 3, 2, 6 \rangle \qquad \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ A(0, & 0, & 1) \end{matrix}$$

$$3x + 2y + 6(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{3x + 2y + 6z = 6}$$

Paralel ve Kesişen Düzlemler - Doğrular

① Normal vektörleri paralel olan iki düzlem paraleldir. iki düzlem paralel değilse kesişiyordur.

② $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ ise iki düzlem diktir. $\cos\theta = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ → Düzlemler arası açı

③ Bir düzlemin normali $\vec{n}$, bir doğrunun yön vektörü $\vec{v}$ olsun.

a) $\vec{n} \parallel \vec{v}$ ise doğru ile düzlem diktir.

b) $\vec{n} \perp \vec{v}$ ise " " " paraleldir.

(*) $x - 2y + 5z = 1$ düzlemi ile $\vec{r}(t) = \langle 2-t, 1+2t, -1+t \rangle$ doğrusu paralel midir?

$x - 2y + 5z = 1 \Rightarrow \vec{n} = \langle 1, -2, 5 \rangle$

$\downarrow \vec{v}$

$x = 2 - t$
$y = 1 + 2t \Rightarrow \vec{v} = \langle -1, 2, 1 \rangle$
$z = -1 + t$

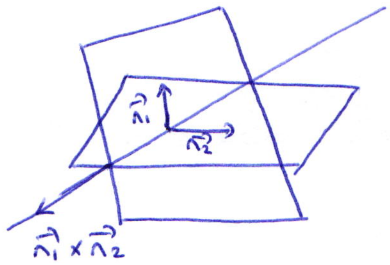
$\vec{n} \cdot \vec{v} = -1 - 4 + 5 = 0 \rightarrow \vec{n} \perp \vec{v}$

⇓

Doğru ile Düzlem Paraleldir.

Not: Doğru ile Doğru Kesişince → Nokta
" " Düzlem " → Nokta
Düzlem " Düzlem " → Doğru

Kesişim Doğruları:



İki düzlemin kesişim doğrusu (arakesit doğrusu); düzlemlerin normal vektörleri $\vec{n_1}$ ve $\vec{n_2}$ nin ikisine de diktir. Dolayısıyla, arakesit doğrusu $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$ ye paraleldir.

Doğrunun yön vektörü: $\boxed{\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}}$

(*) $3x-2y+z=2$ ve $x-y+3z=8$ ile verilen düzlemlerin arakesit doğrusunun parametrik denklemleri?

$3x-2y+z=2 \rightarrow \vec{n_1} = \langle 3,-2,1 \rangle$
$x-y+3z=8 \rightarrow \vec{n_2} = \langle 1,-1,3 \rangle$

$$\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \langle -5,-8,-1 \rangle$$

$\left.\begin{array}{l} 3x-2y+z=2 \\ x-y+3z=8 \end{array}\right\}$ $x=1$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} -2y+z=-1 \\ -y+3z=7 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y=2 \\ z=3 \end{array}$ $(1,2,3) \rightarrow$ Arakesit üzerinde nokta

$$\boxed{\begin{array}{l} x=1-5t \\ y=2-8t \\ z=3-t \end{array}}$$

(*) $x-y=3$, $x+y+z=0$ düzlemlerinin arakesit doğrusuna paralel vektör? Arakesit doğrusu?

$\vec{n_1} = \langle 1,-1,0 \rangle$
$\vec{n_2} = \langle 1,1,1 \rangle$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \langle -1,-1,2 \rangle$$

$\left.\begin{array}{l} x-y=3 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\}$ $z=0 \Rightarrow$ $\begin{array}{l} x-y=3 \\ x+y=0 \end{array}$ $\Rightarrow$ $x=\frac{3}{2}$, $y=-\frac{3}{2}$

$$x=\frac{3}{2}-t$$
$$y=-\frac{3}{2}-t$$
$$z=2t$$

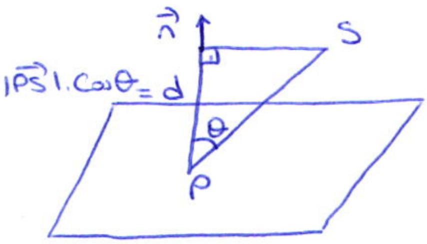
(*) $x=\frac{8}{3}+2t$, $y=-2t$, $z=1+t$ doğrusunun $3x+2y+6z=6$ düzlemi ile kesiştiği nokta?

$$3.\left(\frac{8}{3}+2t\right)+2.(-2t)+6.(1+t)=6 \Rightarrow 8t=-8 \Rightarrow \boxed{t=-1} \Rightarrow \begin{array}{c} x=2/3 \\ y=2 \\ z=0 \end{array}$$

$\left(\frac{2}{3},2,0\right)$ noktası

Bir Noktanın Düzleme Uzaklığı

Eğer P, normali $\vec{n}$ olan bir düzlemde bir nokta ise herhangi bir S noktasının düzleme olan uzaklığı: $\vec{PS}$ vektörünün $\vec{n}$ üzerindeki izdüşümünün uzunluğudur. Yani,



$$\vec{PS}\cdot\vec{n}=|\vec{PS}|.|\vec{n}|.\cos\theta \qquad d=|\vec{PS}|.\cos\theta$$

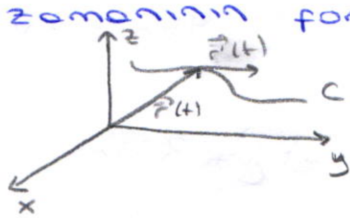
$$\boxed{d=\frac{|\vec{PS}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}}$$

Kısaca: S noktasının, P'den geçen ve normali $\vec{n}$ olan düzleme olan uzaklığı:

$$d=\frac{|\vec{PS}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$ formülü ile bulunur.

Vektörel Fonksiyonlar

3-boyutlu uzayda hareket eden bir parçacığın hareketi, onun pozisyonunun üç koordinatı t zamanının fonksiyonları ile verilerek tanımlanabilir:



$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

Bu durumda parçacığın t zamanındaki konum vektörü $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ olur. Bu şekilde tanımlanmış $\vec{r}(t)$ fonksiyonuna "vektörel fonksiyon" denir. $t \in D$ $(D \subset \mathbb{R})$ olmak üzere D nin her elemanına bir vektör atar.

* Burada t artarken parçacık bir yol boyunca hareket eder; ki bu 3-boyutlu uzayda bir C-eğrisidir.

Türev: Eğer ; f, g, h fonksiyonları t de türevlenebilir ise $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ fonksiyonu t de türevlenebilirdir.

$$\boxed{\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt}\vec{i} + \frac{dg}{dt}\vec{j} + \frac{dh}{dt}\vec{k}}$$

* Eğer $\frac{d\vec{r}}{dt}$ sürekli ise ve asla 0 olmuyorsa; yani f, g, h fonksiyonlarının hepsi aynı anda 0 olmayan 1. mertebe türevleri varsa, $\vec{r}$ tarafından gidilen eğri düzgündür.

* Eğer $\vec{r}$ uzayda düzgün bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın konum vektörü ise:

① $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ parçacığın hız vektörüdür, ve eğriye teğettir.

② $|\vec{v}|$ parçacığın süratidir.

③ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ivme vektörüdür.

④ $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ vektörü birim teğet vektördür. t zamanında hareketin yönüdür. $\left(\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$

$Hız = (Sürat).(Yön) = |\vec{v}|.\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{v}$

(*) $\vec{r}(t) = 3\cos t\,\vec{i} + 3\sin t\,\vec{j} + t^2\vec{k} \Rightarrow$ birim teğet vektör?

$\frac{d\vec{r}}{dt} = -3\sin t\,\vec{i} + 3\cos t\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}$ $\quad \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 4t^2}$

$= \sqrt{9+4t^2}$

$\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = -\frac{3\sin t}{\sqrt{9+4t^2}}\vec{i} + \frac{3\cos t}{\sqrt{9+4t^2}}\vec{j} + \frac{2t}{\sqrt{9+4t^2}}\vec{k}$

Limit ve Süreklilik

$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$, D tanım bölgeli vektör-değerli bir fonksiyon ve $\vec{L} = L_1\vec{i} + L_2\vec{j} + L_3\vec{k}$ bir vektör olsun.

☆ $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{L}$ iken

$\lim_{t\to t_0} f(t) = L_1$, $\lim_{t\to t_0} g(t) = L_2$, $\lim_{t\to t_0} h(t) = L_3$ dür. Yani:

$\boxed{\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to t_0} f(t)\right)\vec{i} + \left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right)\vec{j} + \left(\lim_{t\to t_0} h(t)\right)\vec{k}}$ dir.

☆ $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ ise $\vec{r}(t)$, $t_0 \in D$ noktasında süreklidir.

(*) $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k} \Rightarrow \lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \vec{r}(t) = ?$

$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \cos t\right)\vec{i} + \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \sin t\right)\vec{j} + \left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} t\right)\vec{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\pi}{4}\vec{k}$

⊗ $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ konum vektörü ile verilen cismin $t=1$ deki hız ve ivme vektörlerini bulunuz.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{j} + 6t\vec{k}$$

$t=1$ için $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ $\quad \vec{a} = 2\vec{j} + 6\vec{k}$

⊗ Konum vektörü $\vec{r}(t) = \text{Cos}\,t\,\vec{i} + \text{Sin}\,t\,\vec{j} + t^2\vec{k}$ olan cismin $t=1$ deki süratini ve ivmesini bulun.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\text{Sin}\,t\,\vec{i} + \text{Cos}\,t\,\vec{j} + 2t\vec{k} \Rightarrow \vec{v}(1) = -\text{Sin}\,1\,\vec{i} + \text{Cos}\,1\,\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{Cos}\,t\,\vec{i} - \text{Sin}\,t\,\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \vec{a}(1) = -\text{Cos}\,1\,\vec{i} - \text{Sin}\,1\,\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\text{Sürat} = |\vec{v}| = \sqrt{\sin^2 1 + \cos^2 1 + 2^2} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

Vektörel fonksiyonlar için Türev Kuralları

$\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ türevlenebilir vektör değerli fonksiyonlar; $\lambda(t)$ türevlenebilir skaler değerli fonksiyon olsun.

a) $\dfrac{d}{dt}(\vec{u} \mp v) = \dfrac{d\vec{u}}{dt} \mp \dfrac{dv}{dt}$

b) $\dfrac{d}{dt}(\lambda(t)\,\vec{u}(t)) = \dfrac{d\lambda(t)}{dt}.\vec{u}(t) + \lambda(t).\dfrac{d\vec{u}(t)}{dt}$

c) $\dfrac{d}{dt}(\vec{u}(t).\vec{v}(t)) = \vec{u}'(t).\vec{v}(t) + \vec{u}(t).\vec{v}'(t)$

d) $\dfrac{d}{dt}(\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$

e) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{u}(\lambda(t))\right) = \lambda'(t).\vec{u}'(\lambda(t))$

f) Eğer $\vec{r}$ sabit uzunluklu $(|\vec{r}(t)| = c = \text{sabit})$ vektörel fonksiyon ise $\vec{r}.\dfrac{d\vec{r}}{dt} = 0$ dır.

$\vec{r}.\vec{r} = c^2$

$\vec{r}'.\vec{r} + \vec{r}.\vec{r}' = 0$

$2\vec{r}.\vec{r}' = 0$

$\vec{r}.\vec{r}' = 0$

Yay Uzunluğu

Bir $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ $\quad a\le t\le b$ eğrisinin uzunluğu

$$S=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

dir. $\vec{r}(t)$ yi bir parçacığın konum vektörü olarak düşünürsek: $S=\int_a^b|\vec{v}(t)|\,dt$ olur.

⊛ $\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\sin t\,\vec{k}$ eğrisinin $0\le t\le\pi$ aralığındaki uzunluğunu bulunuz.

$$\vec{r}\,'(t)=\vec{i}-\sin t\,\vec{j}+\cos t\,\vec{k}\Rightarrow S=\int_0^\pi\underbrace{\sqrt{1+\underbrace{\sin^2t+\cos^2t}_{1}}}_{\sqrt{2}}\,dt=\underline{\sqrt{2}\,\pi}$$

Yay Uzunluğu Parametresi

Eğer t parametresine bağlı düzgün C eğrisi üzerinde $P(t_0)$ temel noktası seçilirse; t'nin her değeri C-eğrisi üzerinde bir $P(t)=(x(t),y(t),z(t))$ noktası ve C üzerinde temel noktadan itibaren bir "doğrultulmuş uzunluk" verir.

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

s'ye eğrinin yay uzunluğu parametresi denir. $\vec{r}(t)$ eğrisi s parametresine göre tekrar yazılabilir.