

* $f(x,y) = x^2 + 3y$ fonksiyonunun f_x ve f_y türevlerini türev tanımı ile bulunuz.

$$f_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 3y - (x^2 + 3y)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(2x+h)}{x} = \underline{\underline{2x}}$$

$$f_y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3(y+h) - (3y + x^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3y + 3h - 3y - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \underline{\underline{3}}$$

* $f(x,y) = \ln(xy^2)$ fonksiyonunun x 'e göre 1. mertebe kısmi türevini türev tanımı ile bulunuz.

$$f_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln((x+h)y^2) - \ln(xy^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot (\ln((x+h)y^2) - \ln(xy^2))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\ln \frac{(x+h)y^2}{xy^2} \right)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{1/h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \cdot h \right)^{1/h} = \ln(e^{1/x}) = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = e$

*) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun orijin haric her noktada süreklili olduğunu gösteriniz.

*) $(x,y) \neq (0,0)$ için fonksiyon $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ ile tanımlıdır.

Bu fonksiyon $(0,0)$ haric her noktada süreklidir.

*) Fonksiyon $(0,0)$ da tanımlıdır. Ancak $(0,0)$ da limit yoktur. Çünkü;

$y=mx$ boyunca limit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot mx}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{2m}{1+m^2} \Rightarrow \text{Sonuç } m\text{'ye bağımlı, Limit YOK}$$

$(0,0)$ da fonksiyonun limiti mevcut olmadığından fonksiyon $(0,0)$ da sürekli değildir.

*) Sonuç olarak fonksiyon $(0,0)$ haric her noktada süreklidir.

*) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonu $(0,0)$ da sürekli midir?

$y=mx$ boyunca limit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot mx}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3mx^2}{x^2(x^2 + m^2)} = \frac{3m}{m^2} = \frac{3}{m} \rightarrow \text{limit } m\text{'ye bağımlı,}$$

Limit YOK

||

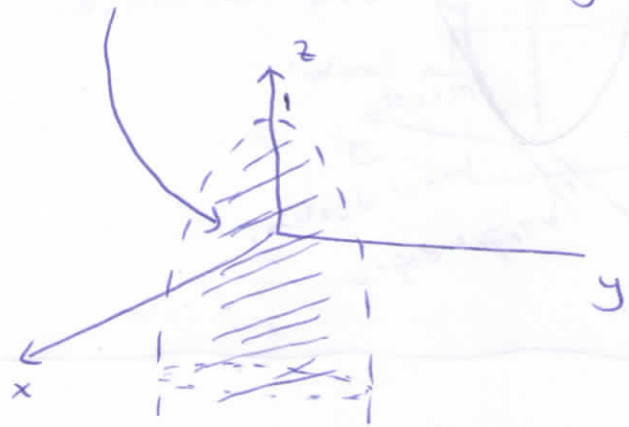
fons. Sürekli DEĞİL

* $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-z-x^2-y^2}}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulup çiziniz.

$1-z-x^2-y^2 > 0$ olmalı.

$1-x^2-y^2 > z$

$z = 1-x^2-y^2 \rightarrow$ Tepe noktası $z=1$ de Kolları aşağı doğru paraboloid

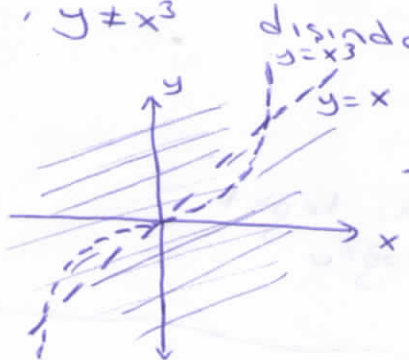


* $f(x,y) = \frac{(x-1)(y+2)}{(y-x)(y-x^3)}$ fonksiyonunun tanım bölgesini çiziniz.

$y-x \neq 0$ ve $y-x^3 \neq 0$ olmalı

$y \neq x$, $y \neq x^3$

dışındaki tüm noktalarda tanımlı.

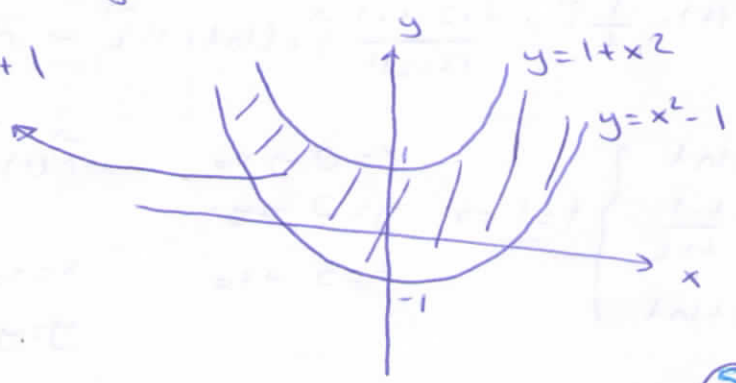


\rightarrow Tanım bölgesi $y=x$ ve $y=x^3$ grafiğinde bulunmayan tüm (x,y) noktaları

* $f(x,y) = \text{ArcCos}(y-x^2)$ tanım bölgesini çiziniz.

$-1 \leq y-x^2 \leq 1$

$x^2-1 \leq y \leq x^2+1$

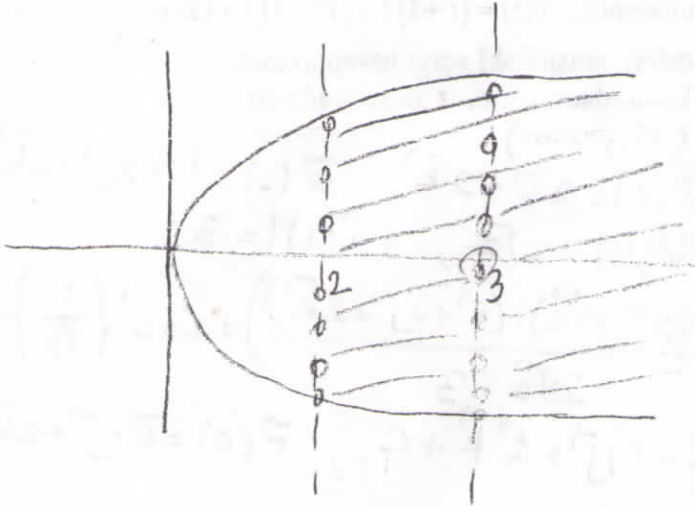


2-a) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x-y^2}}{\ln(x-2)}$ ile verilen f fonksiyonunun tanım bölgesini belirleyiniz (Şekil çizilecek). (12 puan)

$$\sqrt{x-y^2}: x-y^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq y^2 \quad \checkmark$$

$$\ln(x-2): x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$\frac{1}{\ln(x-2)}: \ln(x-2) \neq 0 \quad x-2 \neq 1 \quad x \neq 3$$



2-b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 2^-)} \frac{x+y-2}{\sqrt{x} + \sqrt{2-y}}$ (limitini hesaplayınız. (13 puan))

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 2^-)} \frac{\cancel{x+y-2} (\sqrt{x} - \sqrt{2-y})}{\cancel{x+y-2}} = 0$$

YTÜ - Mühendislik Fakülteleri YAZ OKULU II. VİZE Sınav Soru ve Cevap Kağıdı				NOT TABLOSU				
				1. S	2. S	3. S	4. S	TOPLAM
Adı Soyadı								
Öğrenci Numarası		Grup No						
Bölümü				Sınav Tarihi				
Dersin Adı		MAT1072 MATEMATİK II		Sınav Süresi	90 dk	Sınav Yeri		
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı				İmza				
YÖK nun 2547 sayılı Kanununun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.								

Soru -1-a) $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x^2+y^2 \neq 0}} \frac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}$ limitini hesaplayınız. (10 P)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1+x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1+x^2+y^2})}{1-(1+x^2+y^2)} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1+x^2+y^2})}{-x^2-y^2} = - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+\sqrt{1+x^2+y^2}) = -2$$

Soru -1-b) Parçalı olarak $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$ ile verilen f fonksiyonunun $P(0,0)$ noktasındaki sürekliliğini araştırınız. (13)

$f, \forall b \neq 0$ için $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ şeklindeki noktalarda

sürekli.

$$\forall y \neq 0 \text{ için, } -1 \leq \sin \frac{1}{y} \leq 1$$

$$\forall x, y \neq 0 \text{ için, } -x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{y} \leq x^2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (-x^2) \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 \sin \frac{1}{y}) \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 \sin \frac{1}{y}) = 0 = f(0,0)$ old. için $f, (0,0)$ de süreklidir.

$$\textcircled{*} f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun

a) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ kısmi türevlerinin varlığını araştırınız.

b) $f(x,y)$ nin $(0,0)$ daki sürekliliğini inceleyiniz.

$$a) f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \underline{\underline{0}}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \underline{\underline{0}}$$

b) $x = my^2$ için $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{my^2 \cdot y^2}{m^2y^4 + y^4} = \frac{m}{1+m^2} \rightarrow$ Sonuç m 'ye bağlı, limit yok. Sürekli değil.

$$\textcircled{*} \Rightarrow f(x,y) = \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4} \text{ fonksiyonunun } (2,0) \text{ noktasındaki}$$

limitinin varlığını araştırınız.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{(\sqrt{2x-y}-2)(\sqrt{2x-y}+2)} = \frac{1}{4}$$

$$(*) \quad g\left(\frac{x}{z}\right) = yz \Rightarrow x \cdot z_x - y \cdot z_y = z \quad \text{old. g\u00f6sterini\u00e7.}$$

Pinar Albayrak
2. Vize
2. Uygulama

$$f: g\left(\frac{x}{z}\right) - yz = 0$$

$$z_x = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{\frac{1}{z} \cdot g'\left(\frac{x}{z}\right)}{-\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) - y} \Rightarrow x \cdot z_x = \frac{\frac{x}{z} \cdot g'\left(\frac{x}{z}\right)}{\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) + y}$$

$$z_y = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{-z}{-\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) - y} \Rightarrow -y \cdot z_y = \frac{yz}{\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) + y}$$

$$x z_x - y z_y = \frac{\frac{x}{z} g'\left(\frac{x}{z}\right) + yz}{\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) + y} = \underline{\underline{z}}$$

$$(*) \quad z = x + \frac{1}{x} g(xy) \Rightarrow x \cdot z_x - y z_y = 2x - z \quad \text{old. g\u00f6sterin.}$$

$$z_x = 1 - \frac{1}{x^2} g(xy) + \frac{1}{x} \cdot y g'(xy) \Rightarrow x z_x = x - \frac{1}{x} g(xy) + y g'(xy)$$

$$z_y = \frac{1}{x} \cdot x \cdot g'(xy) \Rightarrow -y z_y = -y g'(xy)$$

$$x z_x - y z_y = \underline{\underline{x - \frac{1}{x} g(xy) + y g'(xy) - y g'(xy)}}$$

$$2x - z = 2x - x - \frac{1}{x} g(xy) = \underline{\underline{x - \frac{1}{x} g(xy)}} \Rightarrow x z_x - y z_y = 2x - z \quad \checkmark$$

* $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2) \cdot \cos \frac{1}{x^2+y^2}$ limitini hesaplayınız.

$(x,y) \neq (0,0)$ için $-1 \leq \cos \frac{1}{x^2+y^2} \leq 1$ dir.

$$\downarrow$$
$$-(x^2+y^2) \leq (x^2+y^2) \cdot \cos \frac{1}{x^2+y^2} \leq x^2+y^2$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -(x^2+y^2) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2) = 0$ olduğundan Sıkıştırma

Teoremine göre $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2) \cdot \cos \frac{1}{x^2+y^2} = 0$ dir.

* Eğer $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^3+y^3}$ ise

a) $y=x$ boyunca $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ hesaplayın.

b) $y=x^2$ "

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ mevcut mudur?

a) $y=x$ boyunca limit: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2x}{x^3+x^3} = \frac{1}{1} = 1$

b) $y=x^2$ " " : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 \cdot x^2}{x^3+x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4}{x^3(1+x^3)} = \frac{0}{0} = 0$

c) (a) ve (b) sıktındaki sonuçlar farklı çıktığından limit mevcut değildir.

$$\textcircled{*} z = x f(x+y) + y g(x+y) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ old. g\ddot{a}sterin.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x+y) + x \cdot f'(x+y) + y g'(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'(x+y) + f'(x+y) + x f''(x+y) + y g''(x+y) \quad (*)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x f'(x+y) + g(x+y) + y g'(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x f''(x+y) + g''(x+y) + g'(x+y) + y g''(x+y) \quad (**)$$

x'e göre t\ddot{u}rev

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(x+y) + x f''(x+y) + g'(x+y) + y g''(x+y)$$

$$\begin{aligned} (*) + (**) &\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f'(x+y) + 2x f''(x+y) + 2y g''(x+y) + 2g'(x+y) \\ &= 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

$$\textcircled{\text{B}} e^{x+y+z} = x+y-z \Rightarrow z_x - z_y = 0 \text{ old. g\ddot{a}sterin}$$

$$f: e^{x+y+z} - x - y + z = 0 \rightarrow \text{K\ddot{a}pali fonk.}$$

$$z_x = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{e^{x+y+z} - 1}{e^{x+y+z} + 1} \quad z_y = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{e^{x+y+z} - 1}{e^{x+y+z} + 1}$$

$$z_x - z_y = 0$$



YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi, 2015-2016
BAHAR 2.Ara Sınav Soru ve Cevap Kağıdı

NOT TABLOSU

		1.S	2.S	3.S	4.S	TOPLAM
Adı Soyadı						
Öğrenci No	Grup No					
Bölümü		Sınav Tarihi		30/04/2016		
Dersin Adı	MAT1072 MATEMATİK 2		Sınav Süresi	100dk	Sınav Yeri	
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı			İmza			
YÖK nun 2547 sayılı Kanununun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.						

1-a) Uzayda hareket eden bir parçacığın hızı, t zamanında, $\vec{v}(t) = (t+1)\vec{i} + (t^2-1)\vec{j} + (2t)\vec{k}$

ile verilmiştir. $t=1$ anındaki hız ve ivme vektörleri arasındaki açıyı hesaplayınız.

Eğer $t=0$ anında parçacık $(1,-1,2)$ noktasında konumlanmış ise, t zamanında bu parçacığın, $\vec{r}(t)$ konum vektörünü bulunuz. (12 puan)

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(\vec{v}(t)) = \vec{i} + 2t\vec{j} + 2\vec{k} \quad \vec{v}(1) = 2\vec{i} + 2\vec{k} \quad \vec{a}(1) = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|\vec{v}(1)| = 2\sqrt{2}, \quad |\vec{a}(1)| = 3$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{|\vec{v}(1) \cdot \vec{a}(1)|}{|\vec{v}(1)| \cdot |\vec{a}(1)|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{(2\vec{i} + 2\vec{k}) \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})}{2\sqrt{2} \cdot 3} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt = \left(\frac{t^2}{2} + t \right) \vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \vec{j} + t^2 \vec{k} + C, \quad \vec{r}(0) = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \text{ ise}$$

$$\vec{r}(0) = \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t + 1 \right) \vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} - t - 1 \right) \vec{j} + (t^2 + 2) \vec{k} //$$

1-b) $\vec{r}(t) = at^2\vec{i} + bt\vec{j} + c \ln t \vec{k}$, ($1 \leq t \leq T$) eğrisinin uzunluğunu bir belirli integral olarak ifade edip, $b^2 = 4ac$ iken, eğrinin uzunluğu hesaplayınız. ($a, b, c, T \in \mathbb{R}$). (13 puan)

$$L = \int_1^T \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \int_1^T \sqrt{4a^2t^2 + b^2 + \frac{c^2}{t^2}} dt$$

$$b^2 = 4ac \Rightarrow L = \int_1^T \sqrt{4a^2t^2 + 4ac + \frac{c^2}{t^2}} dt = \int_1^T \left(2at + \frac{c}{t} \right) dt$$

$$= aT^2 + c \ln T - a = a(T^2 - 1) + c \ln T //$$

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi, I. Vize Sınav Soru ve Cevap Kağıdı				NOT TABLOSU				
				1. S	2. S	3.S	4. S	TOPLAM
Adı Soyadı								
Öğrenci Numarası		Grup No						
Bölümü				Sınav Tarihi			11/05/2013	
Dersin Adı	0251322 MATEMATİK II (5 saat) II. Vize			Sınav Süresi	90 dk	Sınav Yeri		
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı				İmza				
YÖK nun 2547 sayılı Kanununun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.								

$$1. f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun (0,0) noktasında sürekliliğini inceleyiniz. Nedenini açıklayınız.

i.) fonksiyon (0,0) noktasında tanımlı } (5)

ii.) (0,0) noktasına $y=mx$ doğrusu boyunca yaklaşırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(mx^2)}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2} \quad \} (10)$$

her m için farklı bir limit değeri alacağından

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ limiti mevcut değildir. } (5)

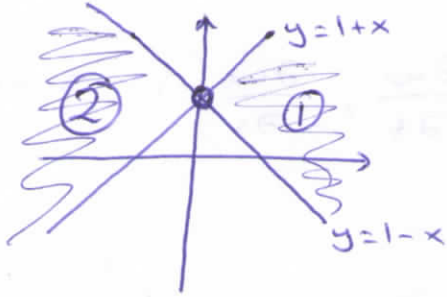
fonksiyonun (0,0) noktasında limiti olmadığından sürekli değildir. } (5)

* $z = \text{ArcSin} \frac{y-1}{x}$ fonksiyonunun tanım bölgesini çiziniz.

$x \neq 0$ ve $-1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1$ olmalı.

① $x > 0$ için $-x \leq y-1 \leq x \Rightarrow 1-x \leq y \leq 1+x$

② $x < 0$ için $-x \geq y-1 \geq x \Rightarrow 1+x \leq y \leq 1-x$



* Eğer f ve g iki kez türevlenebilir tek değişkenli fonksiyonlar ise $w = f(x-ct) + g(x+ct)$ için $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ olduğunu gösteriniz.

$$w = f(x-ct) + g(x+ct)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -c \cdot f'(x-ct) + c g'(x+ct) \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f'(x-ct) + g'(x+ct) \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

* $z = g\left(\frac{x-y}{y}\right) \Rightarrow x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$ olduğunu gösteriniz.

• $z = g\left(\frac{x}{y} - 1\right) \Rightarrow z_x = \frac{1}{y} \cdot g'\left(\frac{x}{y} - 1\right)$
 $z_y = -\frac{x}{y^2} \cdot g'\left(\frac{x}{y} - 1\right)$

$$\begin{aligned} x \cdot z_x + y \cdot z_y &= \frac{x}{y} g' - \frac{x}{y} g' \\ &= \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

* $w = f(s^3 + t^2)$, $f'(x) = e^x$ olsun. $\frac{\partial w}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$; s ve t cinsinden bulunuz.

$w = f(s^3 + t^2)$ $x = s^3 + t^2$ olsun.

$w = f(x)$, $x = s^3 + t^2 \Rightarrow$

$\begin{matrix} & & \text{c.o.} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ w & \rightarrow & x & \rightarrow & s, t \\ & & \text{T.O.} & & \text{c.o.} \end{matrix}$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = e^x \cdot 3s^2 = 3s^2 \cdot e^{s^3+t^2}$$

$f'(x) = e^x$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = e^x \cdot 2t = 2t \cdot e^{s^3+t^2}$$

$f'(x) = e^x$

* $w = (x+y+z)^2$, $x = r-s$, $y = \cos(r+s)$, $z = \sin(r+s) \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{\substack{r=1 \\ s=-1}} = ?$

$w \xrightarrow{\text{c.o.}} x, y, z \xrightarrow{\text{c.o.}} r, s$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \\ &= 2(x+y+z) \cdot 1 + 2(x+y+z) \cdot (-\sin(r+s)) + 2(x+y+z) \cdot \cos(r+s) \end{aligned}$$

$\left. \begin{matrix} r=1 \\ s=-1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x=2 \quad y=1 \quad z=0$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{2 \cdot (2+1)}{6} + \frac{2 \cdot (2+1) \cdot (-\sin(0))}{0} + \frac{2 \cdot (2+1)}{6} \cdot \frac{\cos 0}{1} = \underline{\underline{12}}$$

* $f(x,y) = \ln(xy+x-y-1)$ fonksiyonunun tanım bölgesini siziniz.

$xy+x-y-1 > 0$ olmalı.

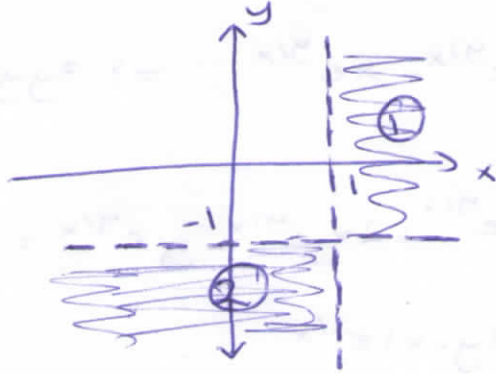
$$x(y+1) - (y+1) > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} x-1 > 0 \quad y+1 > 0 \Rightarrow \boxed{x > 1 \quad y > -1} \\ \textcircled{2} x-1 < 0 \quad y+1 < 0 \Rightarrow \boxed{x < 1 \quad y < -1} \end{array} \right\}$$

$$(x-1)(y+1) > 0$$

$$\textcircled{1} \quad + \quad +$$

$$\textcircled{2} \quad - \quad -$$



$$* f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonu $(0,0)$ de süreklidir mi?

* fonksiyon $(0,0)$ de tanımlıdır

$$* \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y(x-y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 0$$

* $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ olduğundan fonk. $(0,0)$ de süreklidir

* $z = \text{ArcSin} \frac{x}{y} + \text{Arctan} \frac{y}{x}$ için $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$ olduğunu gösterin.

$$z_x = \frac{1}{y} + \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \Rightarrow x \cdot z_x = \frac{\cancel{x}}{\cancel{y}} + \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$z_y = \frac{-\frac{x}{y^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} + \frac{1}{x} \Rightarrow y \cdot z_y = \frac{-\frac{x}{y}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} + \frac{\cancel{y}}{\cancel{x} + \frac{y^2}{x^2}}$$

$$x z_x + y z_y = 0 \quad \checkmark$$

*) $z = x^2 \cdot e^{y/x} \Rightarrow x z_{xy} + (y-x) z_{yy} = 0$ old. gösterin.

$$z_x = 2x \cdot e^{y/x} + x^2 \cdot \frac{-y}{x^2} e^{y/x} = (2x-y) e^{y/x}$$

$$z_{xy} = -e^{y/x} + (2x-y) \cdot \frac{1}{x} e^{y/x}$$

$$z_y = x^2 \cdot \frac{1}{x} e^{y/x} = x e^{y/x} \Rightarrow z_{yy} = x \cdot \frac{1}{x} e^{y/x} = e^{y/x}$$

$$x \cdot z_{xy} = -x e^{y/x} + 2x e^{y/x} - y e^{y/x} = (x-y) e^{y/x}$$

$$(y-x) z_{yy} = (y-x) e^{y/x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} + \Rightarrow x z_{xy} + (y-x) z_{yy} = 0$$

*) $z = f(x+t, y-t)$ ise $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$ olduğunu gösterin.

$$\left. \begin{array}{l} u = x+t \\ v = y-t \end{array} \right\} z \rightarrow u, v \rightarrow x, y, t$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}}{\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial t}}{\frac{\partial z}{\partial t}}$$

$$2-a) f(x,y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 2, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ile tanımlı f fonksiyonunun $A(0,0)$ noktasında sürekli

olup olmadığını inceleyiniz. (12 Puan)

$f(x,y) \neq (0,0)$ için fonk sürekli, $(0,0)$ da tanımlı $f(0,0) = 2$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}) (1 + \cos \sqrt{x^2 + y^2})}{(x^2 + y^2) (1 + \cos \sqrt{x^2 + y^2})} = \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{1 + \cos \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 2 \quad (2)$$

$A(0,0)$ da $f(x,y)$ sürekli değildir. (2)

2-b) $u = f(s) + g(r)$ fonksiyonu s ve r ye bağlı ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir

fonksiyon olsun. $s = 5x + y$ ve $r = y - 5x$ olmak üzere $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 25 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ifadesinin sıfıra eşit olduğunu,

zincir kuralını kullanarak gösteriniz. (13 Puan)

$$D_x = D_s \cdot 5 - D_r \cdot 5 \quad (2)$$

$$D_{xx} = 5 (D_{ss} \cdot 5 - D_{sr} \cdot 5) - 5 [D_{rs} \cdot 5 - D_{rr} \cdot 5]$$

$$= 25 D_{ss} - 25 D_{sr} - 25 D_{rs} + 25 D_{rr} \\ = 25 D_{ss} - 50 D_{sr} + 25 D_{rr} = 25 f''(s) + 25 g''(r) \quad (3)$$

$$D_y = D_s \cdot 1 + D_r \cdot 1 \quad (2)$$

$$D_{yy} = D_{ss} \cdot 1 + D_{rs} \cdot 1 + D_{sr} \cdot 1 + D_{rr} \cdot 1 = D_{ss} + D_{rr} \\ = f''(s) + g''(r) \quad (3)$$

$$D_{xx} - 25 D_{yy} = 25 f''(s) + 25 g''(r) - 25 f''(s) - 25 g''(r) = 0 \quad (3)$$

* $\vec{r}(t) = (e^t \cos t)\vec{i} + (e^t \sin t)\vec{j} + e^t\vec{k}$ eğrisinin

$-\ln 4 \leq t \leq 0$ aralığındaki uzunluğu?

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$x = e^t \cos t \Rightarrow x' = e^t \cos t - e^t \sin t \rightarrow (x')^2 = e^{2t} \cos^2 t - 2e^{2t} \cos t \sin t + e^{2t} \sin^2 t = e^{2t} - 2e^{2t} \cos t \sin t$$

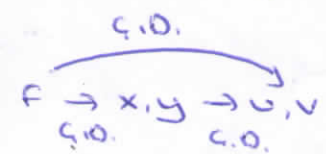
$$y = e^t \sin t \Rightarrow y' = e^t \sin t + e^t \cos t \rightarrow (y')^2 = e^{2t} \sin^2 t + e^{2t} \cos^2 t + 2e^{2t} \sin t \cos t = e^{2t} + 2e^{2t} \cos t \sin t$$

$$z = e^t \Rightarrow z' = e^t \Rightarrow (z')^2 = e^{2t}$$

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 3e^{2t} \Rightarrow \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{3e^{2t}} = \sqrt{3} e^t$$

$$s(t) = \int_{-\ln 4}^0 \sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3} e^t \Big|_{-\ln 4}^0 = \sqrt{3} e^0 - \sqrt{3} e^{\frac{-\ln 4}{1}} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

* $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$ $x = e^v \sin u$ $y = \ln v + \cos u \Rightarrow f_u, f_v$ 'yi zincir kuralı ile bulunuz.



$$f_u = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{y^2} \cdot e^v \cos u + \left(-\frac{2x}{y^3}\right) \cdot (-\sin u)$$

$$f_v = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{y^2} e^v \sin u + \left(-\frac{2x}{y^3}\right) \cdot \frac{1}{v}$$

*) Kabul edelim ki g diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $z \neq 0$ için $g\left(\frac{x}{z}, yz\right) = 0$ dir. Eğer $z = f(x, y)$ ise $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z$ olduğunu gösteriniz. (2016 - yaz okulu 2. vize sorusu)

I. Çözüm

$$g\left(\frac{x}{z}, yz\right) = 0 \text{ ise } \frac{x}{z} = h(yz) \text{ yazılabilir.}$$

$F(x, y) = 0$ kapalı fonksiyonunu $y = f(x)$ şeklinde açık yazmak gibi düşündük

$$\frac{x}{z} = h(yz) \Rightarrow F(x, y, z) = \frac{x}{z} - h(yz) = 0 \text{ olur.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x}{z^2} - y \cdot h'(zy)} = \frac{z}{yz^2 h' + x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} = \frac{-z \cdot h'(zy)}{-\frac{x}{z^2} - y \cdot h'(zy)} = \frac{z^3 h'}{yz^2 h' + x}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz + yz^3 h'}{yz^2 h' + x} = \underline{\underline{z}}$$

II. Çözüm

$$g\left(\frac{x}{z}, yz\right) = 0 \Rightarrow yz = h\left(\frac{x}{z}\right) \text{ yazılabilir. } \Rightarrow F(x, y, z) = h\left(\frac{x}{z}\right) - yz = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{\frac{1}{z} \cdot h'\left(\frac{x}{z}\right)}{-\frac{x}{z^2} \cdot h'\left(\frac{x}{z}\right) - y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} = \frac{-z}{-\frac{x}{z^2} h'\left(\frac{x}{z}\right) - y}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{x}{z} h' + zy}{\frac{x}{z^2} h' + y} = \underline{\underline{z}}$$

III. Çözüm

$$g\left(\frac{x}{z}, yz\right) = 0 \quad u = \frac{x}{z} \quad v = yz \quad g \rightarrow u, v \rightarrow x, y, z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{g_u \cdot \frac{1}{z}}{g_u \left(-\frac{x}{z^2}\right) + g_v \cdot y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{g_v \cdot y}{g_u \left(-\frac{x}{z^2}\right) + g_v \cdot y}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z \quad \checkmark$$

*) Kabul edelim ki z , x ve y nin diferansiyellenebilen bir fonksiyonu olarak $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ denklemini sağ-lamaktadır. Kutupsal koordinatlara $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ ne olur?

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z \xrightarrow{\text{C.O.}} x, y \xrightarrow{\text{C.O.}} r, \theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot (r \cos \theta)$$

$$= -y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0}$$

*) Kabul edelim ki z ; x ve y değişkenlerine bağlı diferansiyellenebilen bir fonk. olmak üzere

$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ denklemini sağlamaktadır. Bu denklemin

kutupsal koordinatlarda alacağı şekli (formül) bulunuz.

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} z \xrightarrow{\text{C.O.}} x, y \xrightarrow{\text{C.O.}} r, \theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \sin \theta$$

↓ r ile çarparsak

$$r \frac{\partial z}{\partial r} = \underbrace{r \cos \theta}_{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \underbrace{r \sin \theta}_{y} \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow r \frac{\partial z}{\partial r} = 0$$

0 olduğundan

* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^4)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0), & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ daki f_x ve f_y türevlerini türev tanımı ile hesaplayınız.

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin h^3}{h^2} - \frac{0}{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^3}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^3}{h^3} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin h^4}{h^2} - \frac{0}{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^4}{h^3} \cdot \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^4}{h^4} \cdot h = 0$$

* $w = f(s^3 + r^2)$ ve $f'(x) = e^x$ olsun. $\frac{\partial w}{\partial r}$ ve $\frac{\partial w}{\partial s}$ i bulunuz.
 $x = s^3 + r^2$ olsun. $w = f(x)$

$f = w \rightarrow x \rightarrow s, r$
 r.o. c.o.

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} = e^x \cdot 2r \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = e^x \cdot 3s^2$$

* $w = f\left(t s^2, \frac{s}{t}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2}{2}$ olsun. $\frac{\partial w}{\partial t}$ ve $\frac{\partial w}{\partial s}$ i bulun.

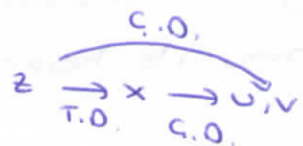
$x = t s^2$
 $y = \frac{s}{t}$ } olsun.
 $w = f \rightarrow x, y \rightarrow s, t$
 c.o. c.o.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = xy \cdot s^2 + \frac{x^2}{2} \cdot \left(-\frac{s}{t^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = xy \cdot 2st + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{t}$$

* $z = 5 \operatorname{Arctan} x$, $x = e^u + \ln v$ ise $u = \ln 2$ ve $v = 1$ olduğunda

$\frac{\partial z}{\partial u}$ ve $\frac{\partial z}{\partial v}$ yi bulunuz.



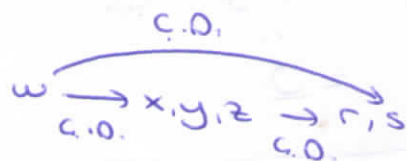
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{5}{1+x^2} \cdot e^u \quad \begin{matrix} x=2 \\ u=\ln 2 \\ v=1 \end{matrix} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{5}{1+2^2} \cdot 2 = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{5}{1+x^2} \cdot \frac{1}{v} \quad \begin{matrix} x=2 \\ u=\ln 2 \\ v=1 \end{matrix} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{5}{1+2^2} \cdot 1 = 1$$

$$\left. \begin{matrix} u = \ln 2 \\ v = 1 \end{matrix} \right\} \boxed{x=2}$$

* $w = (x+y+z)^2$, $x = r-s$, $y = \cos(r+s)$, $z = \sin(r+s)$ ise

$r=1$, $s=-1$ için $\frac{\partial w}{\partial r} = ?$



$$\left. \begin{matrix} r=1 \\ s=-1 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{matrix}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= 2(x+y+z) \cdot 1 + 2(x+y+z) \cdot (-\sin(r+s)) + 2(x+y+z) \cdot \cos(r+s)$$

$$\left. \begin{matrix} r=1 \\ s=-1 \\ x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial r} = 2 \cdot (2+1+0) + 2 \cdot (2+1+0) \cdot (-\sin 0) + 2 \cdot (2+1+0) \cdot \cos 0$$

$$= 6 + 6 = \underline{\underline{12}}$$

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi, Final Sınavı Soru ve Cevap Kağıdı				NOT TABLOSU				
				1. S	2. S	3.S	4. S	TOPLAM
Adı Soyadı								
Öğrenci Numarası			Grup No					
Bölümü				Sınav Tarihi		27/05/2013		
Dersin Adı	0251322 MATEMATİK II (5 saat) Final Sınavı			Sınav Süresi	95 dk	Sınav Yeri		
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı				İmza				
YÖK nun 2547 sayılı Kanununun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.								

1. $w = f\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-y}{yz}\right)$ olmak üzere, $x^2 \frac{\partial w}{\partial x} + y^2 \frac{\partial w}{\partial y} + z^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ bağıntısını gerçekleyiniz.

$$w = f\left(\underbrace{\frac{y-x}{xy}}_u, \underbrace{\frac{z-y}{yz}}_v\right), \quad u = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \quad v = \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \quad (15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot 0 = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} \quad \left. \vphantom{\frac{\partial w}{\partial x}} \right\} (5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \left(\frac{1}{y^2}\right) + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{y^2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}\right) \quad \left. \vphantom{\frac{\partial w}{\partial y}} \right\} (5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \quad \left. \vphantom{\frac{\partial w}{\partial z}} \right\} (5)$$

$$x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{\partial w}{\partial u} + y^2 \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}\right) + z^2 \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} = 0 \quad \left. \vphantom{x^2} \right\} (4)$$