(*) Parametrik olarak verilen:

$C_1: \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 1+t^2 \end{cases}$ ve $C_2: \begin{cases} x = 1+s \\ y = s-2 \\ z = 4+s^2 \end{cases}$ eğrileri arasındaki açıyı bulunuz.

* İki eğrinin kesiştiği noktadaki açı, teğet vektörleri arasındaki açıdır. Önce kesişim noktasını bulalım.

$$\left.\begin{array}{l} t = 1+s \\ 1-t = s-2 \\ 1+t^2 = 4+s^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} t-s = 1 \\ -t-s = -3 \\ \hline \boxed{s=1} \quad \boxed{t=2} \end{array}$$

$C_1: \vec{r_1}(t) = t\vec{i} + (1-t)\vec{j} + (1+t^2)\vec{k} \xrightarrow{\text{Teğeti}} \vec{r_1'}(t) = \vec{i} - \vec{j} + 2t\vec{k} \overset{t=2}{\Longrightarrow}$

$\vec{r_1'}(2) = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$

$C_2: \vec{r_2}(t) = (1+s)\vec{i} + (s-2)\vec{j} + (4+s^2)\vec{k} \xrightarrow{\text{Teğeti}} \vec{r_2'}(t) = \vec{i} + \vec{j} + 2s\vec{k} \overset{s=1}{\Longrightarrow}$

$\vec{r_2'}(1) = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{r_1'} \cdot \vec{r_2'}}{|\vec{r_1'}| \cdot |\vec{r_2'}|} = \frac{\langle 1,-1,4\rangle \cdot \langle 1,1,2\rangle}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1-1+8}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$\theta = \operatorname{ArcCos}\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)$$

(*) Aşağıdaki fonksiyonların tanım bölgelerini çiziniz.

a) $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2) + \sqrt{xy}$

b) $f(x,y) = \ln(x-y^2) + \sqrt{4-x^2-y^2}$

c) $f(x,y) = \ln \dfrac{y}{x^2+y^2-1}$

d) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{xy}}$

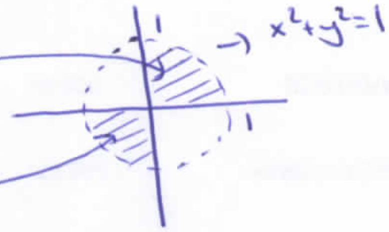
Cevap:

a) $1-x^2-y^2 > 0$ $\quad xy \geq 0$ olmalı

$x^2+y^2 < 1$ $\quad xy \geq 0$

① $x^2+y^2<1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

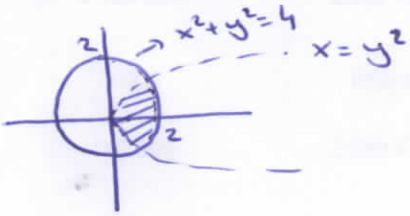
② $x^2+y^2<1$, $x \leq 0$, $y \leq 0$



---

b) $x-y^2>0$, $4-x^2-y^2 \geq 0$

$x>y^2$, $4 \geq x^2+y^2$

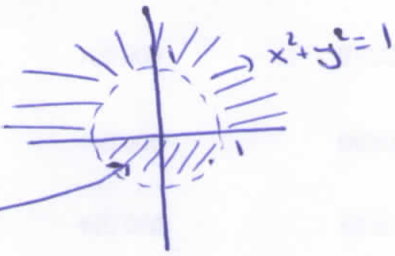


---

c) $\dfrac{y}{x^2+y^2-1} > 0$, $x^2+y^2 \neq 1$

① $y>0$, $x^2+y^2>1$

② $y<0$, $x^2+y^2<1$



---

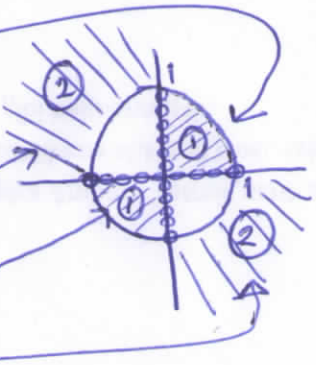
d) $\dfrac{1-x^2-y^2}{xy} \geq 0$, $xy \neq 0$

① $1-x^2-y^2 \geq 0$, $xy>0$

$1 \geq x^2+y^2$ + $\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x<0 \\ y<0 \end{matrix}$

② $1-x^2-y^2 \leq 0$ $\quad xy<0$

$1 \leq x^2+y^2$ + $\begin{matrix} x>0 \\ y<0 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x<0 \\ y>0 \end{matrix}$



Sevgili Mat2 Öğrencileri,

“2. Vize konuları nereye kadar?” konulu mailleri almaya başladığıma göre 2. vize çalışmaları başlamış ☺ Mailler birikmeden soruyu herkes için cevaplayayım istedim:

2. Vize en baştan yönlü türevin sonuna kadar (şimdiye kadar yüklediğim tüm notlar sınava dahil)

Ayrıca, 1. vize notları açıklandığından beri “ilk vize notum çok düşük, pes mi edeyim yoksa 2. vizede şansımı deneyeyim mi” sorusunu içeren mailler de alıyorum. **Cevabım:**

1. Vize notunuz ne kadar düşük olursa olsun, 2 vize 1 finalli sistemde sıkı bir çalışma ile toparlanmayacak not yok emin olun. 1. vizeden sonraki konuların baştaki konularla bağlantısı yok farkettiyseniz ; işte tam da bu yüzden Mat2 ye yeni bir başlangıç için 2. Vize kaçırılmayacak bir fırsat ☺ Bu fırsatı iyi değerlendirin; ki zaten bu satırları okuyorsanız umut kaybetmeden çalışmaya devam ediyorsunuz demektir , aynen devam ☺

Hepinize 2. Vize sınavlarınızda başarılar dilerim...

Sevgiler,

Pınar Albayrak

⊛ $z = x.f(ye^x) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{x}$ old. gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f.(ye^x) + x.ye^x f'(e^x y) \rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x.e^x f'(ye^x) \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = f + \cancel{xye^x f'} - \cancel{yxe^x f'}$$

$$= f = \frac{z}{x}$$

$\left(\frac{z}{x} = f(ye^x)\right.$ olduğundan$\left.\right)$

⊛ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y\sin\pi x}{x+y-2}$ limitinin varlığını inceleyin.

$$\lim_{x\to1}\left[\lim_{y\to1} \frac{y\sin\pi x}{x+y-2}\right] = \lim_{x\to1}\left[\frac{\sin\pi x}{x-1}\right] = \lim_{x\to1}\frac{\pi\cos\pi x}{1} = -\pi$$

$0/0 \to L'H.$

$$\lim_{y\to1}\left[\lim_{x\to1} \frac{y\sin\pi x}{x+y-2}\right] = \lim_{x\to1}\frac{0}{y-1} = 0$$

$\neq$ iki kat limit yok

$\Downarrow$

Limit yok

⊛ $x - az = f(y-bz) \Rightarrow a.\frac{\partial z}{\partial x} + b.\frac{\partial z}{\partial y} = 1$ old. gösterin.

z: bağımlı x,y: bağımsız

$\Downarrow$

$x - az = f(y-bz)$ kapalı fonk.

$F: x - az - f(y-bz) = 0$ olsun.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{1}{-a + bf'(y-bz)} \searrow$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-a}{-a+bf'} + \frac{bf'}{-a+bf'} = \underline{\underline{1}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-f'(y-bz)}{-a+bf'(y-bz)} \nearrow$$

⊛ $x\sin z = 1 + z^2 y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = ?\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = ?$ $\quad f: x\sin z - 1 - z^2 y = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\sin z}{x\cos z - 2zy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{\cos z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x\cos z - 2zy) - \sin z \cdot \left[-x\sin z \frac{\partial z}{\partial y} - 2z - 2y\frac{\partial z}{\partial y}\right]}{(x\cos z - 2zy)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = +\frac{z^2}{x\cos z - 2zy}$$

⊛ $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = f(x,y) \Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ old. gösterin.

$z \to x, y \to u, v$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \cos v\frac{\partial z}{\partial x} + \sin v\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -u\sin v\frac{\partial z}{\partial x} + u\cos v\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \cos^2 v\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2\sin v\cos v\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \sin^2 v\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$\frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{u^2}\left[u^2\sin^2 v\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2\sin v\cdot\cos v\cdot u^2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + u^2\cos^2 v\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

(*) $\left.\begin{array}{l} u = z - x \\ v = y - z \\ w = x - y \end{array}\right\}$ olmak üzere $f(u,v,w)$ türevlenebilir ise

$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ olduğunu gösteriniz.

$$f \underset{\text{Ç.D.}}{\rightarrow} u,v,w \underset{\text{Ç.D.}}{\rightarrow} x,y,z$$

Ç.D.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{-1} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{0} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{0} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{1} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}}_{-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}}_{1} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial z}}_{-1} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{0}$$

+

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

(*) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy + x^{3/2}}{y^3 + xy}$ limitinin varlığını inceleyin.

$x = ky^2$ boyunca limit:

$$\lim_{y\to 0} \frac{2ky^3 + k^{3/2}y^3}{y^3 + ky^3} = \frac{2k + k^{3/2}}{1+k} \rightarrow \text{Sonuç } k\text{'ya bağlı}$$

$\downarrow$

Limit yok

⊛ $f(x,y) = \dfrac{3x^2 - y^2}{x^2 + 3y^3}$ fonksiyonunun $(0,0)$ da limiti var mıdır?

$y = mx$ için:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - m^2x^2}{x^2 + 3m^3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(3-m^2)}{\cancel{x^2}(1+3m^3x)} = 3 - m^2 \rightarrow \text{Sonuç } m\text{'ye bağlı}$$

Limit yok!

⊛ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} = ?$ $\quad x^3 - y^3 = (x-y).(x^2+xy+y^2)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)\,(x^2 + \cancel{y^2 + xy})}{x^2 + \cancel{xy + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-y) = 0$$

⊛ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1} - 1} = ?$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2).(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{(x^2+y^2)}.(\overbrace{\sqrt{x^2+y^2+1}}^{1}+1)}{\underbrace{x^2+y^2\cancel{+1}\cancel{-1}}_{\cancel{(x^2+y^2)}}} = 2$$

⊛ $f(x,y) = \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^4}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitinin 0 olduğunu gösteriniz.

Her $\varepsilon > 0$ için $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ iken $\left|\dfrac{x^2y^4}{x^4+y^4} - 0\right| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ var mı?

$$\left|\frac{x^2y^4}{x^4+y^4}\right| \le \frac{x^2(x^4\cancel{+y^4})}{x^4\cancel{+y^4}} = x^2 \le x^2+y^2 < \delta^2 = \varepsilon \Rightarrow \delta^2 = \varepsilon \rightarrow \boxed{\delta = +\sqrt{\varepsilon}}$$

$\delta = \sqrt{\varepsilon}$ bulunur.

Limit gerçekten 0'dır.

2. $f(x,y) = 4x^3y^2 + 2y$ olmak üzere fonksiyonun $x = 1.1$ ve $y = -1.9$ noktalarındaki yaklaşık değerini lineerizasyonu kullanarak bulunuz.

Çözüm: $x_0 = 1$ ve $y_0 = -2$ alınırsa

$f_x(x,y) = 12x^2y^2$ ve $f_x(x_0,y_0) = 12.1.4 = 48$ 5

$f_y(x,y) = 8x^3y + 2$ ve $f_y(x_0,y_0) = 8.1.(-2) + 2 = -14$ olarak bulunur. 5

Bu konu sınava dahil değil!

$$L(x,y) = f(x,y) + f_x(x_0,y_0).(x - x_0) + f_y(x_0,y_0).(y - y_0)$$

$$= 12 + 48.(x-1) - 14.(y+2)$$ 10

$$= 48x - 14y - 64$$

$$f(1.1,-1.9) \approx 48(1.1) - 14(-1.9) - 64$$ 5

$f(1.1,-1.9) \approx 15.4$ olarak bulunur.

(+) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-y}{x-3y^2+3y}$ fonksiyonunun (0,1) deki limitini

a) $y = x+1$ doğrusu boyunca bulunuz.

b) (0,1) de limitinin mevcut olmadığını gösterin.

a) $y = x+1$ boyunca limit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+(x+1)^2-(x+1)}{x-3(x+1)^2+3(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+x}{-3x^2-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(2x+1)}{\cancel{x}(-3x-2)} = -\frac{1}{2}$$

b) İki kat limite bakalım:

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 1} \frac{x^2+y^2-y}{x-3y^2+3y}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^2+y^2-y}{x-3y^2+3y}\right] = \lim_{y\to 1} \frac{\cancel{y^2-y}}{-3(\cancel{y^2-y})} = -\frac{1}{3}$$

$\neq$ İki kat limit yok. Dolayısıyla limit YOK