Sürekli olması için $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ old. göstermeliyiz. C.Ö.10

Her $\varepsilon>0$ sayısı için $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ iken $\left|\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı var mı?

$$\left|\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|.|x^2-y^2|}{x^2+y^2} < \frac{|x|.\cancel{|x^2+y^2|}}{\cancel{x^2+y^2}} = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

$\delta=\varepsilon>0$ bulunabildiğinden limit 0'dır ve fonk. süreklidir.

(*) $$f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$$ fonksiyonunun (0,0) daki sürekliliğini inceleyeniz. Nedenini açıklayınız.

Fonksiyon (0,0) da tanımlıdır. ✓

$y=mx$ boyunca limit: $\lim_{x\to0} \frac{\sin(mx^2)}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to0} m.\underbrace{\frac{\sin(mx^2)}{mx^2}}_{1} . \frac{1}{1+m^2}$

$= \frac{m}{1+m^2}$ → Sonuç m'ye bağlı limit yok!

$f(x,y)$ nin (0,0) da limiti mevcut olmadığından fonk. (0,0) da sürekli değildir.

Kısmi Türevler

$z=f(x,y)$ fonksiyonunun x ve y değişkenine göre 1. mertebe kısmi türevleri:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1(x,y) = f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$ ⇒ y'yi sabit düşünüp x'e göre türev alınır

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_2(x,y) = f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h\to0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$ ⇒ x'i sabit düşünüp y'ye göre türev alınır

limitlerinin mevcut olması koşulu ile $f_x(x,y)$ ve $f_y(x,y)$ fonksiyonlarıdır.

Burada $f_x(x,y)$, y sabit olmak üzere sadece x'in bir fonksiyonu olarak göz önüne alınan $f(x,y)$ nin birinci mertebe türevidir. $f_y(x,y)$; x in sabit tutularak sadece y nin bir fonksiyonu olarak göz önüne alınan $f(x,y)$ nin birinci mertebe türevidir.

NOTASYON:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a,b) = f_1(a,b) \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a,b) = f_2(a,b)$$

NOT: Toplamlar, çarpımlar, bölümler için geçerli olan tüm türev kuralları, kısmi türevler için de geçerlidir.

⊛ $z = x^3y^2 + x^4y + 4x^3y^4 + y^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4x^3y + 12x^2y^4 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + x^4 + 16x^3y^3 + 2y$$

⊛ $f(x,y) = e^{xy}.\cos(x+y) \Rightarrow f_1(0,\pi) = ?$

$$f_1(x,y) = ye^{xy}\cos(x+y) - e^{xy}\sin(x+y)$$

$$f_1(0,\pi) = \pi.e^0.\underbrace{\cos\pi}_{-1} - e^0.\underbrace{\sin\pi}_{0} = -\pi$$

⊛ $f(x,y) = x^2y$ fonksiyonu f_y 'yi tanım ile bulunuz.

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2(y+h)-x^2y}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2\cancel{h}}{\cancel{h}} = \underline{\underline{x^2}}$$

(*)

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cdot \sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ türevlerinin $(0,0)$ değerlerini mevcut ise hesaplayınız.

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-\overbrace{f(0,0)}^{0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\cdot \sin\frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h}=\lim_{h\to 0} h\cdot \sin\frac{1}{|h|}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-\overbrace{f(0,0)}^{0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\cdot \sin\frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h}=\lim_{h\to 0} h\cdot \sin\frac{1}{|h|}=0$$

Basit Zincir Kuralı (Bileşke fonk. Türevi)

$z=f(g(x,y))$ için $$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x,y))=f'(g(x,y))\cdot g_x(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(g(x,y))=f'(g(x,y))\cdot g_y(x,y)$$

(*) $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$ ise $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$ olduğunu gösteriniz.

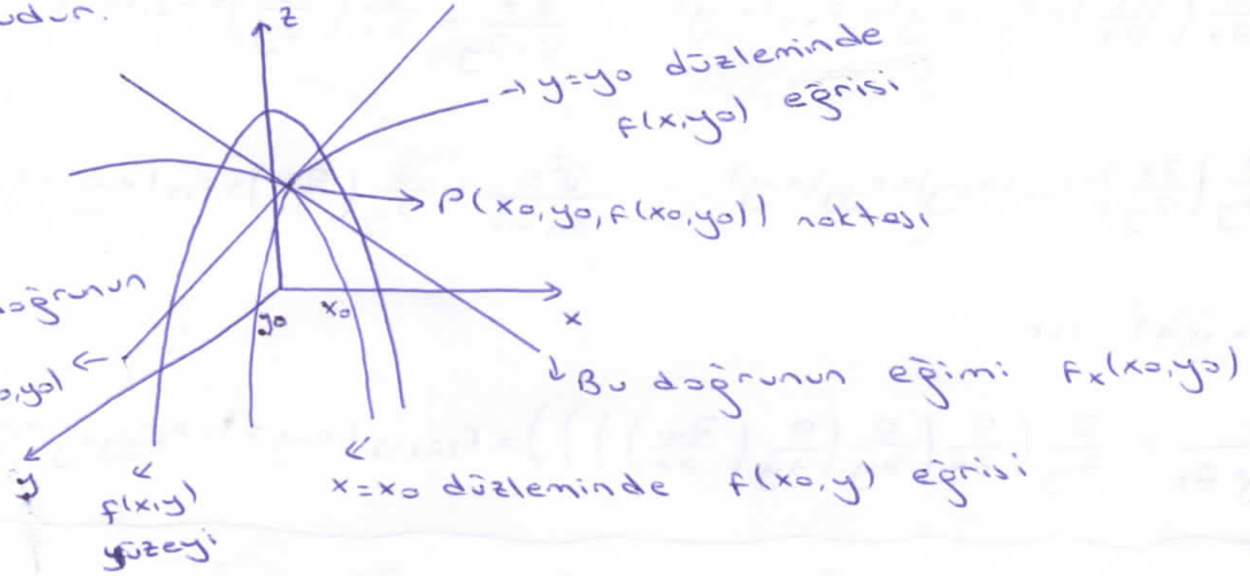
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} \Rightarrow x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{y}\cdot f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{-x}{y^2} \Rightarrow y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y}\cdot f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$+$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\underline{\underline{0}}$$

* $z=f(x,y)$ yüzeyinin $x=x_0$ $[y=y_0]$ düzlemiyle kesişimiyle oluşan $z=f(x_0,y)$ $[z=f(x,y_0)]$ eğrisinin $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ noktasındaki eğimi f in y ye göre $[x$ e göre$]$ (x_0,y_0) noktasındaki kısmi türevine eşittir. Eğrinin P deki teğet doğrusu bu eğimle P den geçen doğrudur.



* $z=f(x,y)$ yüzeyinin $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ noktasında iki tane teğet doğrusu olduğunu gördük. Bu iki doğrunun tanımladığı düzleme "teğet düzlem" denir.

İkiden Fazla Değişkenli Fonksiyonların Türevi:

Eğer $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ n değişkenli bir fonksiyon ise o zaman f in herbir değişkene göre alınan n tane kısmi türevi $f_1(x_1,\dots,x_n)$, $f_2(x_1,\dots,x_n)$, ..., $f_n(x_1,\dots,x_n)$ olur.

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2xy}{1+xz+y^2}\right)=-\frac{2xy\cdot x}{(1+xz+y^2)^2} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{1+xz+y^2}\right)=\frac{2y(1+xz+y^2)-2xy\cdot z}{(1+xz+y^2)^2}$$

Yüksek Mertebeden Türevler

İkinci ve daha yüksek mertebeden kısmi türevler, hesaplanmış mevcut kısmi türevlerin kısmi türevleri olinarak elde edilir.

☆ $z=f(x,y)$ için 2. mertebe kısmi türevler:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{11}(x,y)=f_{xx}(x,y) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{21}(x,y)=f_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{22}(x,y)=f_{yy}(x,y) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{12}(x,y)=f_{xy}(x,y)$$

☆ $w=f(x,y,z)$ ise:

$$\frac{\partial^5 w}{\partial y\partial x\partial y^2\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)\right)\right)=f_{32212}(x,y,z)=f_{zyyxy}(x,y,z)$$

⊛ $f(x,y)=x\cos y+e^x.y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial y^2}, \frac{\partial f}{\partial y\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x\partial y}=?$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos y+e^x.y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-x\sin y+e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^x.y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x\cos y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\sin y+e^x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-\sin y+e^x$$

⊛ $z=\ln(x^2+y^2) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2x.2x}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2y.2y}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$+$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 \checkmark$$

Karışık Türev Teoremi

Eğer $f(x,y)$ ve onun kısmi türevleri f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}, (a,b) de sürekli ve (a,b) yi içeren bir bölgede tanımlı iseler $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ dir.

★ 2. mertebe türevlerde olduğu gibi sürekli olduğu müddetçe tüm mertebeden türevlerin türev alma sırası bir önem ifade etmez.

(x) $z = e^{kx}.\cos ky$ $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ old. gösterin.

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -ke^{kx}\sin ky \qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -k^2 e^{kx}\sin ky$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = ke^{kx}\cos ky \qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -k^2 e^{kx}\sin ky$ $\Big] =$

İki Değişkenli Fonksiyonlar için Artırım Teoremi

(x_0, y_0) noktasını içeren açık bir R bölgesinde $f(x,y)$ nin birinci mertebe türevleri tanımlı ve (x_0,y_0) da f_x ve f_y sürekli olsun. Bu durumda R bölgesinde (x_0,y_0) dan başka bir $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta x)$ noktasına taşınması ile oluşan f değerindeki değişim

(x) $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x,y) = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$

denklemini sağlar. Burada $\Delta x, \Delta y \to 0$ iken, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ dır.

★ $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ türevleri mevcut olan, ve (x) denklemini sağlayan $f(x,y)$ fonksiyonuna (x_0,y_0) da türevlenebilirdir denir.

Özetle; bir fonksiyonun birinci mertebe türevleri (x_0,y_0) da sürekli ise bu durumda bu fonksiyonun (x_0,y_0) da türevlenebilir olduğu söylenir.

C.O.16

✱ Eğer tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonu $x=a$ da $f'(a)$ türevine sahipse fonk. $x=a$ da süreklidir. Ancak, bu özellik kısmi türevlerde geçerli değildir.

Çok değişkenli fonksiyon bir noktada tüm 1. mertebeden türevlere sahip olsa bile fonk. o noktada sürekli olmayabilir.

✱ $f(x,y)$ nin 1. mertebe kısmi türevleri f_x ve f_y (x_0,y_0)'ı içeren bir bölgede sürekli ise fonksiyon (x_0,y_0) da süreklidir diyebiliriz.

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & , xy\neq 0\\ 1 & , xy=0\end{cases}$$

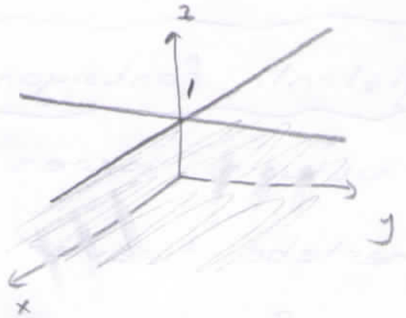
a) $y=x$ boyunca $f(x,y)$ nin $(0,0)$ daki limiti?

b) f'in $(0,0)$ da sürekli olmadığını gösterin

c) f_x ve f_y nin $(0,0)$ da mevcut olduğunu gösterin.

a) $y=x$ boyunca orjin hariç $xy\neq 0$ dır.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$



b) $f(0,0)=1$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ $\Big\rangle \neq$ sürekli değil

c) $f_x(0,0)$ için $y=0$ sabit $\Rightarrow x.y=0 \Rightarrow f(x,y)=1 \Rightarrow f_x(0,0)=0$ ✓

$f_y(0,0)$ için $x=0$ " $\Rightarrow x.y=0 \Rightarrow f(x,y)=1 \Rightarrow f_y(0,0)=0$ ✓

Zincir Kuralı

① Eğer $z=z(x,y)$ 1. mertebe kısmi türevleri sürekli olan bir fonksiyon ve $x=x(t)$ $y=y(t)$ türevlenebilir fonksiyonlar ise:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \text{ dir.} \qquad z \xrightarrow[\text{Ç.O}]{} x,y \xrightarrow[\text{T.O}]{} t \quad (z \xrightarrow{\text{T.O.}} t)$$

② $z=f(x,y)$ 1. mertebe kısmi türevleri sürekli olan bir fonksiyon ve $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$ s ve t nin türevlenebilir fonksiyonları ise o zaman:

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} \qquad z \xrightarrow[\text{Ç.O}]{} x,y \xrightarrow[\text{Ç.O}]{} s,t \quad (z \xrightarrow{\text{Ç.O.}} s,t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

⊛ $w=xy$, $x=\cos t$, $y=\sin t$ ise $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=\pi/2}$ türevini zincir kuralını kullanarak hesaplayın.

$w \xrightarrow[\text{Ç.O}]{} x,y \xrightarrow[\text{T.O}]{} t \quad (w \xrightarrow{\text{T.O.}} t)$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=0,\ y=1$$

$$=y\cdot(-\sin t)+x\cdot\cos t$$

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right)+0\cdot\cos\frac{\pi}{2}=\underline{\underline{-1}}$$

⊛ $w=xy+z$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$ $\Rightarrow \left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0}=?$

$w \xrightarrow[\text{Ç.O}]{} x,y,z \xrightarrow[\text{T.O}]{} t \quad (w \xrightarrow{\text{T.O.}} t)$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$=y\cdot(-\sin t)+x\cdot\cos t+1\cdot 1$$

$t=0 \Rightarrow x=1,\ y=0$

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0}=0\cdot(-\sin 0)+1\cdot\cos 0+1=\underline{\underline{2}}$$

⊛ $w = 2y + x + z^2$, $x = \frac{r}{s}$, $y = r^2 + \ln s$, $z = 2r$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial w}{\partial r}$; $\frac{\partial w}{\partial s}$

r ve s cinsinden bulun.

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "\text{Ç.O.}"'] \arrow[rr, bend left, "\text{Ç.O.}"] & x,y,z \arrow[r, "\text{Ç.O.}"'] & r,s \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= 1\cdot\left(-\frac{r}{s^2}\right) + 2\cdot\frac{1}{s} + 2z\cdot 0 = \frac{2s-r}{s^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{s} + 2\cdot 2r + 2z\cdot 2 = \frac{1}{s} + 4r + 2.4r = 12r + \frac{1}{s}$$

⊛ $\frac{\partial}{\partial x} f(x^2y, x+2y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x^2y, x+2y)$ değerlerini f'in kısmi türevleri cinsinden bulun.

$$\left.\begin{aligned} x^2y &= u \\ x+2y &= v \end{aligned}\right\} f(u,v) \qquad \begin{tikzcd} f \arrow[r, "\text{Ç.O}"'] \arrow[rr, bend left, "\text{Ç.O.}"] & u,v \arrow[r, "\text{Ç.O.}"'] & x,y \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = f_u\cdot(2xy) + f_v(1) = 2xy f_u + f_v$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = f_u\cdot x^2 + f_v\cdot 2 = x^2 f_u + 2 f_v$$

Kapalı fonksiyon Türevi : $z = f(x,y)$ olmak üzere,

$F(x,y,z) = 0$ fonksiyonu için :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \quad \text{dir.}$$

ispat: $F(x,y,z) = 0$ ise

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{0} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$F \rightarrow x,y,z \rightarrow x,y$ $\left(\begin{array}{l} x,y \rightarrow \text{bağımsız değ.} \\ z \rightarrow \text{bağımlı değ.} \end{array}\right)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

ile tanımlı f fonksiyonunun $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ türevlerinin mevcut olduğunu ancak (0,0) da sürekli olmadığını gösteriniz.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$y = mx$ için $\lim_{x\to 0} \dfrac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \dfrac{m}{1+m^2}$ => limit yok, sürekli değil!

$\circledast$ $x^3+z^2+ye^{xz}+z\cos y=0$ ise $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0,0)}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0,0)}$ bulun. $\boxed{Ç.0.19}$

I. Yol (Uzun Yol)

$x^3+z^2+ye^{xz}+z\cos y=0$ → x'e göre türev alırsak

$$3x^2+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\left[ze^{xz}+x\frac{\partial z}{\partial x}e^{xz}\right]+\frac{\partial z}{\partial x}\cos y=0$$

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\\z=0\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$x^3+z^2+ye^{xz}+z\cos y=0$ → y'ye göre türev alırsak:

$$2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+e^{xz}+yx\frac{\partial z}{\partial y}e^{xz}+\frac{\partial z}{\partial y}\cos y-z\sin y=0$$

$$x=y=z=0 \Rightarrow 1+\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=-1$$

II. Yol formül ile

$F: x^3+z^2+ye^{xz}+z\cos y=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{3x^2+zye^{xz}}{2z+xye^{xz}+\cos y} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0,0)}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{e^{xz}-z\sin y}{2z+xye^{xz}+\cos y} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0,0)}=-1$$

$f(x,y,z)=0$ $\qquad z=f(x,y)$