Teğet Düzlem / Normal Doğru

$f(x,y,z)=c$ fonksiyonu için;

$\nabla f|_{P_0}$ vektörü $\Rightarrow P_0(x_0,y_0,z_0)$ dan geçen teğet düzleme dik

$\nabla f|_{P_0}$ vektörü $\Rightarrow P_0(x_0,y_0,z_0)$ dan geçen normal doğruya paraleldir

$\nabla f|_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{P_0}\vec{k}$ olduğundan;

① $f(x,y,z)=c$ nin $P_0(x_0,y_0,z_0)$ daki teğet düzlemi;

$f_x(P_0).(x-x_0)+f_y(P_0).(y-y_0)+f_z(P_0)(z-z_0)=0$ dır.

② $f(x,y,z)=c$ nin $P_0(x_0,y_0,z_0)$ daki normal doğrusu:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+f_x(P_0).t\\ y&=y_0+f_y(P_0).t\\ z&=z_0+f_z(P_0).t \end{aligned}\right\} \text{ dir.}$$

(*) $z=9-x^2-y^2$ yüzeyinin $P_0(1,2,4)$ deki teğet düzlemi ve normal doğrusu?

$F: z+x^2+y^2-9=0$ $\quad f_x=2x \quad f_y=2y \quad f_z=1$

$\nabla f = 2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}$ $\quad \nabla f(P_0)=2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k} = \langle \overset{a}{\underset{A}{2}}, \overset{b}{\underset{B}{4}}, \overset{c}{\underset{C}{1}} \rangle$ → Teğete dik düzleme → Normale doğruya paralel

$2.(x-1)+4(y-2)+1.(z-4)=0 \rightarrow 2x+4y+z=14$ → Teğet düzlem

$$\left.\begin{aligned} x&=1+2t\\ y&=2+4t\\ z&=4+t \end{aligned}\right\} \text{ Normal doğru}$$

Ç.0.25

(*) (0,0,0) noktasında $z = x\cos y - ye^x$ yüzeyine teğet olan düzlem?

$F: z - x\cos y + ye^x = 0$ $\quad F_x = (-\cos y + ye^x)$ $\quad F_x(0,0,0) = -1$

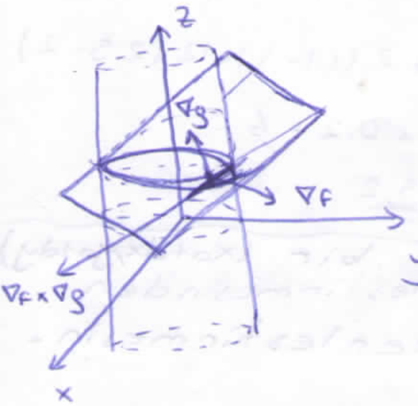
$F_y = (x\sin y + e^x)$ $\quad F_y(0,0,0) = 1$

$F_z = 1$

$\nabla F = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \langle \underset{A}{-1}, \underset{B}{1}, \underset{C}{1} \rangle \Rightarrow -1.(x-0) + 1.(y-0) + 1.(z-0) = 0$

$\boxed{-x + y + z = 0}$

(*) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ silindiri ve $g(x,y,z) = x + z - 4 = 0$ düzlemi bir E elipsi boyunca kesişirler. $P_0(1,1,3)$ noktasında E'ye teğet olan doğrunun parametrik denklemini bulunuz.



Teğet doğru P_0 da hem ∇f 'e hem de ∇g'ye diktir. Yani $\nabla f \times \nabla g$ ye paraleldir.

$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$ $\quad \nabla f \big|_{P_0} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

$\nabla g = \vec{i} + \vec{k}$

$$\vec{v} = \nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} \vec{i} & \overset{(-)}{\vec{j}} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} = \langle \underset{a}{2}, \underset{b}{-2}, \underset{c}{-2} \rangle$$

$\boxed{x = 1 + 2t \quad y = 1 - 2t \quad z = 3 - 2t}$

Lineerleştirme: Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) daki lineerleştirmesi:

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0).(x-x_0) + f_y(x_0,y_0).(y-y_0) \text{ dır.}$$

$f(x,y) \approx L(x,y)$ dır. $L(x,y)$ yaklaşımı f in (x_0,y_0) daki lineer yaklaşımıdır.

(*) 3 değişkenli $f(x,y,z)$ fonksiyonunun $P_0(x_0,y_0,z_0)$ daki lineerleştirmesi:

$$L(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + f_x(x_0,y_0,z_0).(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0).(z-z_0)$$

$f(x,y,z) \approx L(x,y,z)$

C.0.26

(*) $f(x,y)=x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3$ fonksiyonunun $(3,2)$ deki lineerleştirmesini bulun.

$L(x,y)=f(3,2)+f_x(3,2).(x-3)+f_y(3,2).(y-2)$

$f_x=2x-y \qquad f_x(3,2)=4$

$f_y=-x+y \qquad f_y(3,2)=-1$

$f(3,2)=8$

$L(x,y)=8+4(x-3)-(y-2)=4x-y-2$

(*) $(1,1)^2+(2,5)^3$ sayısı için bir yaklaşık değer bulunuz.

$f(x,y)=x^2+y^3 \qquad x_0=1 \quad y_0=2$

$f_x=2x \quad f_y=3x^2 \qquad f_x(1,2)=2 \quad f_y(1,2)=12 \quad f(1,2)=9$

$L(x,y)=9+2.(x-1)+12(y-2)$

$f(x,y)\approx L(x,y) \Rightarrow f(1,1,\ 2,5)\approx L(1.1,\ 2.5)=9+2.(1.1-1)+12(2.5-2)$

$=9+0.2+6$

$=\underline{\underline{15,2}}$

<u>Diferansiyel</u>: Eğer (x_0,y_0) dan yakınındaki bir (x_0+dx, y_0+dy) noktasına hareket edersek, f in lineerleştirmesinden elde edilen değişim:

$$\boxed{df=f_x(x_0,y_0).dx+f_y(x_0,y_0)dy}$$

f'in tam (toplam) diferansiyeli olarak adlandırılır. $\left(\begin{array}{l} dx\cong\Delta x,\ dy\cong\Delta y \\ \Delta f\approx df \end{array}\right)$

(*) Silindirik bir konserve kutusunun 3cm yarıçap ve 12cm yüksekliğe sahip olacak şekilde tasarlandığını, ancak yarıçap ve yüksekliğin sırasıyla $dr=0,08$, $dh=-0,3$ miktarında değiştiğini varsayalım. Konserve kutusunun hacmindeki değişim?

$V=\pi r^2 h$

$V_r=2\pi rh \qquad dr=0,08$

$V_h=\pi r^2 \qquad dh=-0,3$

$r_0=3 \qquad h_0=12$

$V_r(3,12)=72\pi$

$V_h(3,12)=9\pi$

$\Delta V\approx dv=V_r(r_0,h_0)dr+V_h(r_0,h_0)dh$

$=72\pi.(0,08)+9\pi.(-0,3)$

$=5,76\pi-2,7\pi$

$=\underline{\underline{3,06\pi}}$

(*) $(2{,}05).e^{(2.05)^2-3{,}9}$ değerini a) lineerizasyon b) Diferansiyel hesap } ile yaklaşık olarak hesaplayın.

$f(x,y) = x e^{x^2-y}$

$f_x = e^{x^2-y} + 2x^2 e^{x^2-y} = (1+2x^2)e^{x^2-y}$

$f_y = -x e^{x^2-y}$

a) $x_0 = 2 \quad y_0 = 4$ olsun.

$L(x,y) = f(2,4) + f_x(2,4)(x-2) + f_y(2,4)(y-4)$

$f_x(2,4) = 9 \quad f_y(2,4) = -2 \quad f(2,4) = 2$

$f(x,y) \approx L(x,y) = 2 + 9(x-2) - 2(y-4)$

$f(2{,}05,\ 3{,}9) \approx 2 + 9(2{,}05-2) - 2(3{,}9-4) = 2 + 0{,}45 + 0{,}2 = \underline{\underline{2{,}65}}$

---

b) $dz = f_x(2,4)dx + f_y(2,4)dy \qquad x = 2{,}05 \quad x_0 = 2 \qquad y = 3{,}9 \quad y_0 = 4$

$dx \approx \Delta x = x - x_0 = 2{,}05 - 2 = 0{,}05$

$dy \approx \Delta y = y - y_0 = 3{,}9 - 4 = -0{,}1$

$dz \approx \Delta z = f(2{,}05,\ 3{,}9) - f(2,4) = f(2{,}05,\ 3{,}9) - 2$

$f(2{,}05,\ 3{,}9) - 2 \approx 9.(0{,}05) - 2.(-0{,}1)$

$f(2{,}05,\ 3{,}9) \approx 2 + 0{,}45 + 0{,}2 = \underline{\underline{2{,}65}}$

Maksimum - Minimum Değerler

Ekstrem Değerler:

$f(x,y)$ bir $D\subset\mathbb{R}^2$ de tanımlı bir fonksiyon, $(a,b)\in D$ olsun. Eğer (a,b) nin uygun bir komşuluğundaki tüm (x,y) ler için;

$f(x,y)\leq f(a,b)$ ise $f(x,y)$, (a,b) de yerel maksimuma
$f(x,y)\geq f(a,b)$ " " " " minimuma
sahiptir.

Eğer $f(x,y)$ bir noktada yerel max. veya yerel min. sahip ise $f(x,y)$ nin o noktada bir extremuma sahip olduğunu söyleriz.

Teorem: Bir $f(x,y)$ fonksiyonu tanım kümesindeki bir (a,b) noktasında aşağıdakilerden birini sağlıyorsa (a,b) bir kritik noktadır:

a) $f_x(a,b)=0$ ve $f_y(a,b)=0$

b) $f_x(a,b)$ veya $f_y(a,b)$ mevcut değildir.

Yerel Ekstremum İçin Gerekli Şartlar:

$f(x,y)$, bir (a,b) noktasında yerel ekstremuma sahipse ve aynı noktada 1. mertebe kısmi türevleri mevcutsa $f_x(a,b)=0$ ve $f_y(a,b)=0$ dır.

Eyer noktası: $f(x,y)$ bir (a,b) kritik noktasında yerel ekstremuma sahip değilse bu noktaya eyer (semer) noktası denir.

★ Bir (a,b) kritik noktası ve yeterince küçük her h,k sayısı için:

$f(a+h,b+k)-f(a,b)\geq 0 \Rightarrow f$, (a,b) de bir yerel minimuma
$f(a+h,b+k)-f(a,b)\leq 0 \Rightarrow$ " " " " max.
sahiptir.

⊛ $f(x,y)=x^2+y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırın.

$f_x=2x \quad f_y=2y \qquad \left.\begin{array}{l} f_x=2x=0 \\ f_y=2y=0 \end{array}\right\} x=y=0 \rightarrow (0,0)$ K.N.

$f(0+h,0+k)-f(0,0)=h^2+k^2 \geq 0 \Rightarrow (0,0)$ yerel min noktası

⊛ $f(x,y)=(x+y)^2+y^4$

$\left.\begin{array}{l} f_x=2x+2y=0 \quad ① \\ f_y=2x+2y+4y^3=0 \quad ② \end{array}\right\} 2x+2y=0 \xrightarrow{②} 4y^3=0 \rightarrow y=0 \Rightarrow x=0$

$(0,0)$ K.N.

$f(0+h,0+k)-f(0,0)=(h+k)^2+k^4 \geq 0 \Rightarrow (0,0)$ yerel min

---

⊛ $f(x,y)=x^2-y^2$

$\left.\begin{array}{l} f_x=2x=0 \\ f_y=-2y=0 \end{array}\right\} x=y=0 \Rightarrow (0,0)$ K.N.

$f(0+h,0+k)-f(0,0)=h^2-k^2$

$h^2-k^2 \Rightarrow \geq 0$ veya ≤ 0 olabilir. Eyer noktası

---

2. Türev Testi

$f(x,y)$ nin bir $(a,b)\in O(f)$ noktasında bir kritik noktaya sahip olduğunu kabul edelim. $f(x,y)$ ile onun 1. ve 2. mertebe türevleri sürekli ve $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ olsun.

$A=f_{xx}(a,b) \qquad B=f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b) \qquad C=f_{yy}(a,b)$ olmak üzere

a) $B^2-AC<0$ ve $A>0$ ise f, (a,b) de yerel min. sahiptir

b) $B^2-AC<0$ " $A<0$ " " " " max. "

c) $B^2-AC>0$ ise f, (a,b) de bir eyer noktasına sahiptir.

d) $B^2-AC=0$ ise test sonuç vermez. f, (a,b) de bir max/min değere veya bir eyer noktasına sahip olabilir.

(*) $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırın. $\boxed{\text{ç.0.29}}$

$f_x = 6x^2 - 6y = 0$ ①

$f_y = -6x + 6y = 0$ ②

② $\rightarrow x = y \xrightarrow{①} 6x^2 - 6x = 0$ $x=0$, $x=1$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \rightarrow (1,1)$

K.N.

$A = f_{xx} = 12x$

$B = f_{xy} = -6$

$C = 6$

	$A = 12x$	$B = -6$	$C = 6$	$B^2 - AC$	
$(0,0)$	0	-6	6	$36 - 0 = 36 > 0$	$(0,0)$ Eyer noktası
$(1,1)$	12	-6	6	$36 - 12.6 < 0$	$A = 12 > 0$ $(1,1)$ yerel min.

(*) $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3xy^2 - 3y^2$

$f_x = 3x^2 - 6x + 3y^2 = 0$ ①

$f_y = 6xy - 6y = 0$ ②

② $\rightarrow 6y(x-1) = 0 \rightarrow y = 0$ $x = 1$

$x = 1 \xrightarrow{①} y^2 = 1 \rightarrow y = \mp 1 \rightarrow (1,1)$ $(1,-1)$

$y = 0 \xrightarrow{①} 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0$, $x = 2$ $\rightarrow (0,0)$, $(2,0)$

K.N.

$A = f_{xx} = 6x - 6$ $B = f_{xy} = 6y$ $C = f_{yy} = 6x - 6$

	$A = 6x-6$	$B = 6y$	$C = 6x-6$	$B^2 - AC$	
$(0,0)$	-6	0	-6	$0 - 36 < 0$	$A = -6 < 0$ yerel max
$(1,1)$	0	6	0	$36 > 0$	Eyer nok.
$(1,-1)$	0	-6	0	$36 > 0$	Eyer nok.
$(2,0)$	6	0	6	$-36 < 0$	$A = 6 > 0$ yerel min.

İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin Taylor Formülü

$f(x,y)$ fonksiyonunun (a,b) noktasındaki Taylor Açılımı:

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b).(x-a) + f_y(a,b)(y-b) +$$

$$\frac{1}{2!}\left[(x-a)^2.f_{xx}(a,b) + 2(x-a).(y-b)f_{xy}(a,b) + (y-b)^2 f_{yy}(a,b)\right]$$

$$+\frac{1}{3!}\left[(x-a)^3 f_{xxx}(a,b) + 3(x-a)^2(y-b)f_{xxy}(a,b) + 3(x-a)(y-b)^2 f_{xyy}(a,b)\right.$$

$$\left. + (y-b)^3.f_{yyy}(a,b)\right] + \cdots + \frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b).\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n)} f\Big|_{(a,b)}$$

$$+R_n$$

* Maclaurin açılımı için nokta $(0,0)$ alınır.

(*) $f(x,y) = e^x \operatorname{Sin} y$ fonksiyonunun $(0,\frac{\pi}{2})$ noktasında, 2. mertebe türevin bulunduğu terime kadar Taylor Açılımını yazınız.

$$f(x,y) = f(0,\tfrac{\pi}{2}) + f_x(0,\tfrac{\pi}{2}).x + f_y(0,\tfrac{\pi}{2})(y-\tfrac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(0,\tfrac{\pi}{2})x^2 + 2x(y-\tfrac{\pi}{2})f_{xy}(0;\tfrac{\pi}{2}) + (y-\tfrac{\pi}{2})^2.f_{yy}(0,\tfrac{\pi}{2})\right]$$

$f_x = e^x \operatorname{Sin} y \xrightarrow[y=\pi/2]{x=0} f_x(0,\frac{\pi}{2}) = 1$

$f_{xx} = e^x \operatorname{Sin} y \to f_{xx}(0,\frac{\pi}{2}) = 1$

$f_y = e^x \operatorname{Cos} y \to f_y(0,\frac{\pi}{2}) = 0$

$f_{xy} = e^x \operatorname{Cos} y \to f_{xy}(0,\frac{\pi}{2}) = 0$

$f_{yy} = -e^x \operatorname{Sin} y \to f_{yy}(0,\frac{\pi}{2}) = -1$

$$f(x,y) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(y-\tfrac{\pi}{2})^2 + R$$

Kısıtlanmış Değişkenler ile Kısmi Türevler

Ç.0.31 1

$w = x^2 + y^2 + z^2$ ve $z = x^2 + y^2$ ise $\frac{\partial w}{\partial x}$ i bulunuz.

$w, x, y, z \rightarrow$ Hangisi bağımlı / bağımsız değişken?

Bağımlı	Bağımsız
w, y	x, z
w, z	x, y

Notasyon: Bir türevi hesaplarken hangi değişkenin bağımsız olduğunu göstermek için:

* $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y \rightarrow$ x ve y bağımsız, w bağımlı

$$\frac{\partial w}{\partial x}$$

* $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,t} \rightarrow$ x, t, y bağımsız, w bağımlı

$$\frac{\partial w}{\partial y}$$

* $\left.\begin{array}{l} F(x,y,z,w)=0 \\ G(x,y,z,w)=0 \end{array}\right\} \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w \rightarrow$ z, w bağımsız; x, y bağımlı $(x = x(z,w),\ y = y(z,w))$

$$\frac{\partial x}{\partial z}$$

Ç.D. 32

(*) $w = x^2 + y^2 + z^2$, $z^3 - xy + yz + y^3 = 1$ $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ türevinin $(x,y,z) = (2,-1,1)$ deki değerini bulun.

$x, y \to$ bağımsız
$w, z \to$ bağımlı

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{-y}{3z^2 + y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2z \cdot \frac{y}{3z^2 + y} \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(2,-1,1)} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{-1}{3-1} = \underline{\underline{3}}$$

(*) $w = x^2 + y - z + \operatorname{Sin} t$ ve $t = x + y$ ise $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = ?$

$x, y, z \to$ bağımsız değişken $\qquad w, t \to$ bağımlı değişken

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + \underbrace{\frac{\partial t}{\partial x}}_{1} \cdot \operatorname{Cos} t = 2x + \operatorname{Cos} t = 2x + \operatorname{Cos}(x+y)$$

(*) $w = x^2 + y^2 + z^2$, $y \operatorname{Sin} z + z \operatorname{Sin} x = 0$ ise $(x,y,z) = (0,1,\pi)$ de $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x = ?$ $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z = ?$

$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x \to$ x, y bağımsız değişken
$w, z \to$ bağımlı değ.

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2y + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{\operatorname{Sin} z}{y \operatorname{Cos} z + \operatorname{Sin} x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2y + 2z \cdot \frac{-\operatorname{Sin} z}{y \operatorname{Cos} z + \operatorname{Sin} x} \to \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{(0,1,\pi)} = 2 \cdot 1 + 2\pi \cdot \frac{-\operatorname{Sin}\pi}{1 \cdot \operatorname{Cos}\pi + \operatorname{Sin} 0} = 2$$

$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z \to$ $y, z \to$ bağımsız
$w, x \to$ bağımlı

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2x \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + 2y$$

$$= 2x \frac{-\operatorname{Sin} z}{z \operatorname{Cos} x} + 2y$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_x} = -\frac{\operatorname{Sin} z}{z \operatorname{Cos} x}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{(0,1,\pi)} = 0 + 2 \cdot 1 = \underline{\underline{2}}$$