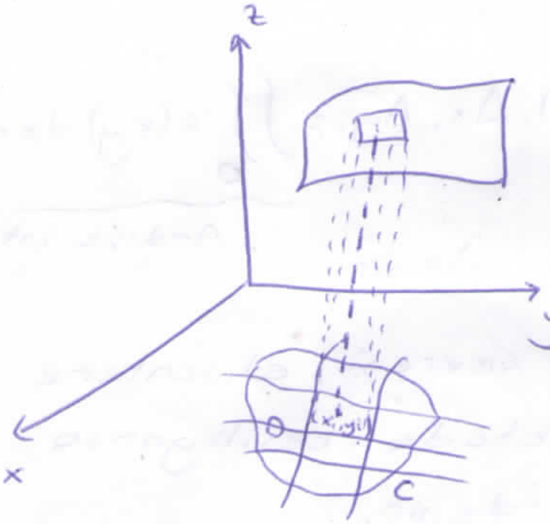
2 Katlı İntegral

$z=f(x,y)$ fonksiyonu xOy düzleminde C eğrisiyle sınırlı, kapalı bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli olsun. D bölgesini, alanları ΔA_i $(i=1,2,\dots,n)$ olan kısmi bölgelere ayırıp, bu bölgelerden keyfi (x_i,y_i) noktaları seçelim.



$D \to D_1,\ D_2,\ \dots,\ D_n$

D_1	D_2	$\dots$	D_n
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
ΔA_1	ΔA_2	$\dots$	ΔA_n
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
$P_1(x_1,y_1)$	$P_2(x_2,y_2)$	$\dots$	$P_n(x_n,y_n)$
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
$z_1=f(x_1,y_1)$	$z_2=f(x_2,y_2)$	$\dots$	$z=f(x_n,y_n)$

$$f(x_1,y_1).\Delta A_1+f(x_2,y_2).\Delta A_2+\dots+f(x_n,y_n).\Delta A_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i).\Delta A_i$$

Bu toplam, tabanı ΔA_i ve yüksekliği $f(x_i,y_i)$ olan silindir elemanlarının hacimleri toplamıdır.

ΔA_i alanlarının herbirinin sıfıra yaklaşması halinde bu toplamın limitine $z=f(x,y)$ fonksiyonunun D bölgesinde iki katlı integrali denir ve

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i).\Delta A_i=\iint_D f(x,y)\,dA=V$$ şeklinde gösterilir.

* Bu integralin değeri, D bölgesinin çevresi üzerinde, üstten $z=f(x,y)$ yüzeyi, alttan $z=0$ düzleminin sınırladığı hacime eşit olur.

Bu limit D bölgesinin kısmi bölgelere bölünüş şekline ve P_i noktalarının ΔA_i içindeki seçiliş şekline bağlı değildir.

* Eğer D bölgesi eksenlere paralel doğrularla kısmi bölgelere ayrılırsa, kısmi bölgeler birer dikdörtgen olur ve bu dikdörtgenlerin alanları

$\Delta A_i = \Delta x_i . \Delta y_i$ ve limit de

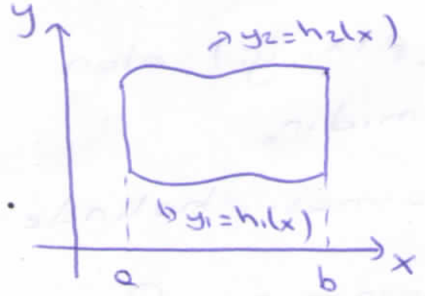
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) . \Delta x_i . \Delta y_i = \underbrace{\iint_D f(x,y)\, dx\, dy}_{\text{Ardışık integral}}$$

olur. D bölgesine integrasyon bölgesi denir.

<u>Düzgün bölge</u>: Eğer D bölgesinin çevresi, eksenlere dik doğrularla en çok 2 noktada kesiliyorsa böyle bölgeye <u>düzgün bölge</u> denir.

Dik Kesitleri Kullanarak 2 Katlı İntegral Hesaplamak

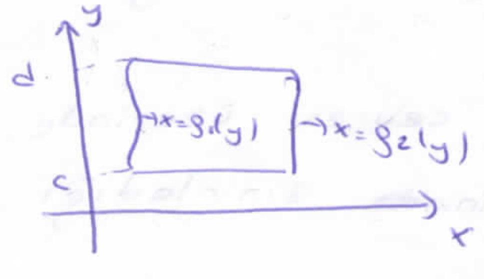
* Bölge x'e göre düzgündür.
* Bölge x'e dik doğrularla taranır.



$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

Yatay Kesitler ile 2 Katlı İntegral Hesaplamak

* Bölge y'ye göre düzgündür
* Bölge y'ye dik doğrularla taranır.



$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

⊛ $D: \left\{ \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \\ y=0 \\ y=x^2 \end{matrix} \right\}$ $I = \iint_D y\,dx\,dy$ integralini

a) x'e göre düzgün bölge

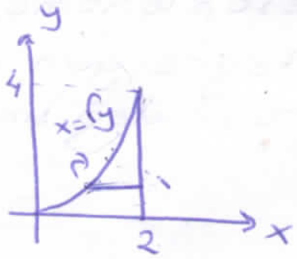
b) y'ye " " " olarak hesaplayın.

a)

$$I = \int_0^2 \int_0^{x^2} y\,dy\,dx = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{x^2} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^4}{2}\,dx = \frac{x^5}{10} \Big|_0^2 = \frac{16}{5}$$

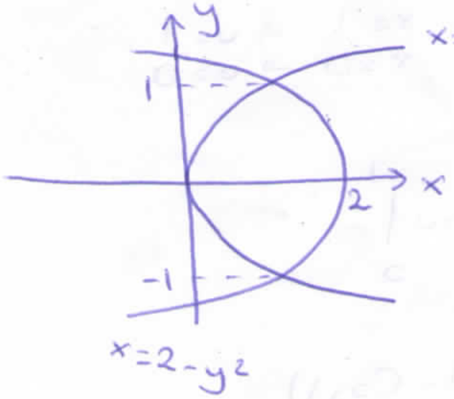
b)



$$I = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{2} y\,dx\,dy = \int_0^4 \left(yx \Big|_{\sqrt{y}}^{2} \right) dy$$

$$= \int_0^4 (2y - y^{3/2})\,dy = y^2 - \frac{y^{5/2}}{5/2} \Big|_0^4 = \frac{16}{5}$$

⊛ $D: \left\{ \begin{matrix} x=y^2 \\ x=2-y^2 \end{matrix} \right\}$ bölgesinde $f(x,y) = 1+5y$ fonksiyonunun integralini hesaplayın.



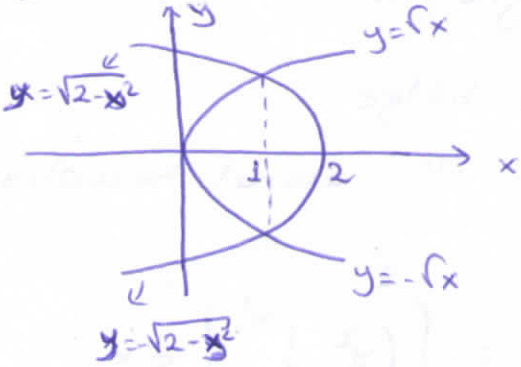
$$\left. \begin{matrix} x=y^2 \\ x=2-y^2 \end{matrix} \right\} \quad y^2 = 2-y^2 \Rightarrow y = \mp 1$$

I. Yol

$$\iint_D (1+5y)\,dA = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{2-y^2} (1+5y)\,dx\,dy \rightarrow$$ y'ye göre düzgün bölge aldık

$$= \int_{-1}^{1} (x+5xy) \Big|_{y^2}^{2-y} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (2-2y^2+10y-10y^3)\,dy = \frac{8}{2}$$



x'e göre düzgün bölge alırsak

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (1+5y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+5y)\,dy\,dx$$

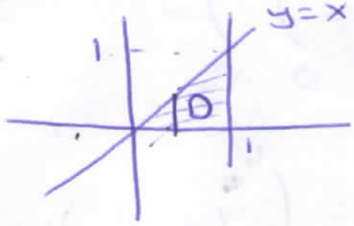
İntegrasyon Sırasını Değiştirme

$$I = \int_0^1 \int_y^1 \sin x^2 \,dx\,dy = ?$$

$\Rightarrow \int_y^1 \sin x^2\,dx$ hesaplanamaz. integrasyon sırası değişmeli!

D: $y=1$ $\quad y=0$

$x=y$ $\quad x=1$



$$I = \int_0^1 \int_0^x \sin x^2 \,dy\,dx = \int_0^1 \left(y \sin x^2\right)\Big|_0^x dx$$

$$= \int_0^1 (x \sin x^2)\,dx$$

$x^2 = u \quad 2x\,dx = du$

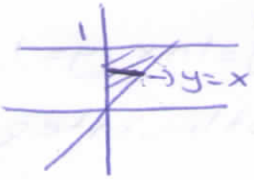
$x=1 \to u=1$

$x=0 \to u=0$

$$= \int_0^1 \frac{\sin u}{2}\,du = -\frac{1}{2}\cos u \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos 1)$$

⊛ $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y}\,dy\,dx = ?$ D: $x=1$, $x=0$, $y=1$, $y=x$



$$I = \int_0^1 \int_0^y e^{x/y}\,dx\,dy = \int_0^1 \left. \frac{e^{x/y}}{\frac{1}{y}} \right|_0^y dy = \int_0^1 (ey - y)\,dy$$

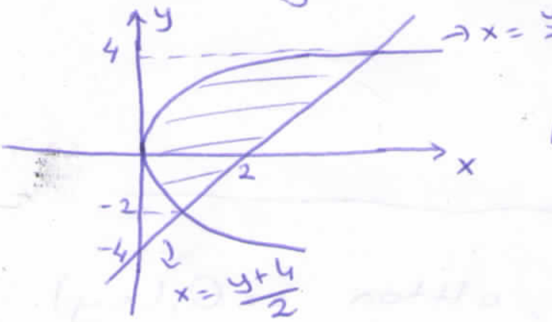
$$= \left. \frac{ey^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

İki Katlı İntegralle Düzlem Alanların Hesabı

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ integralinde $f(x,y)=1$ ise $\iint_D dx\,dy$ integrali D bölgesinin alanını verir.

$$\boxed{A = \iint_D dx\,dy}$$

⊛ $y^2=4x$ ile $y=2x-4$ doğrusu arasında kalan alanı 2 katlı integralle hesaplayın.



$$A = \int_{-2}^{4} \int_{y^2/2}^{\frac{y+4}{2}} dx\,dy = \int_{-2}^{4} \left(\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy = 9$$

$4x = (2x-4)^2$

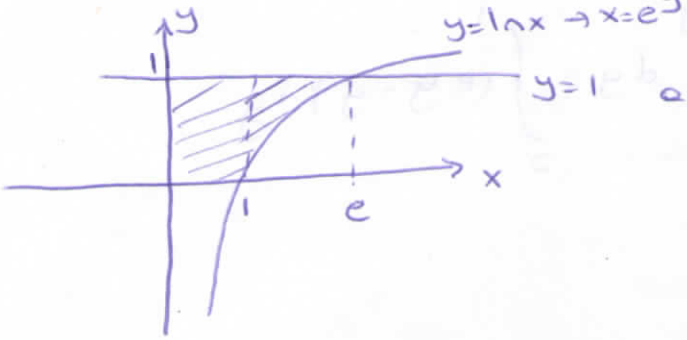
$4x = 4x^2 - 16x + 16$

$x^2 - 5x + 4 = 0$ $x=4 \rightarrow y=4$
$-4 \quad -1$ $x=1 \rightarrow y=-2$

(*) $y=\ln x$, $y=1$, $x=0$, $y=0$ eğrilerinin sınırladığı alanı veren 2 katlı integrali

a) x'e göre düzgün bölge olarak

b) y'ye göre " " " yazınız.



a) $A_D = \iint_D dy\,dx$

$$= \int_0^1 \int_0^1 dy\,dx + \int_1^e \int_{\ln x}^1 dy\,dx$$

b)

$$A = \int_0^1 \int_0^{e^y} dx\,dy$$

İki Katlı İntegralde Hacim Hesabı

① $f(x,y)$ bir D bölgesi üzerinde pozitif bir fonksiyon olsun. Bu durumda üstten $f(x,y)$, alttan $z=0$ ile sınırlı cismin D bölgesi üzerinde oluşturduğu cismin hacmi

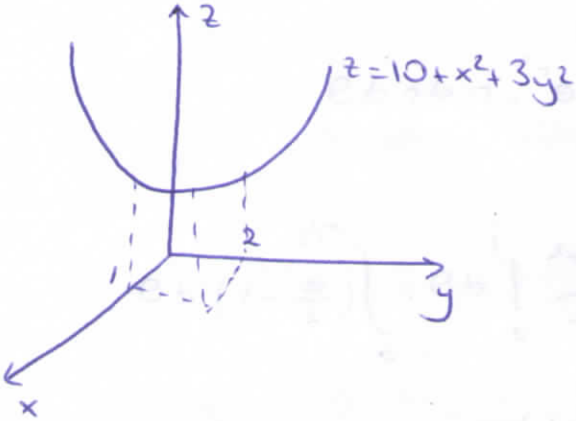
$$V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{dir.}$$

---

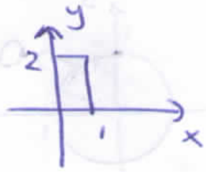
② Eğer cisim üstten $z=Q_2(x,y)\geq 0$, alttan $z=Q_1(x,y)$ ile sınırlı ise, bu yüzeylerin xy düzlemindeki izdüşümü olan D taban olmak üzere, hacim; bu yüzeylerle sınırlı cisimlerin hacimleri farkına eşittir.

$$V = \iint_D (Q_2(x,y) - Q_1(x,y))\,dx\,dy$$

⊛ Üstten $z=10+x^2+3y^2$ paraboloidi ve alttan $z=0$ da $R:\left\{\begin{matrix} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 2\end{matrix}\right\}$ dikdörtgeni ile sınırlı bölgenin hacmi?



$$V=\iint_R (10+x^2+3y^2)\,dy\,dx$$



$$=\int_0^1\int_0^2 (10+x^2+3y^2)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1 (10y+x^2y+y^3)\Big|_0^2\,dy$$

$$=\int_0^1 (20+2x^2+8)\,dx = 28x+\frac{2x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{86}{3}$$

İki Katlı İntegrallerin Kutupsal Koordinatlara Dönüştürülerek Hesabı

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ iki katlı integralini $\left\{\begin{matrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\end{matrix}\right\}$

dönüşümü yaparak hesaplarsak; bu durumda D bölgesi, $r=f_1(\theta)$, $r=f_2(\theta)$ eğrileri ve $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ doğrularının sınırladığı bölge olsun. Bu dönüşümle $dx\,dy=r\,dr\,d\theta$ ve

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_\alpha^\beta\int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta).\,r\,dr\,d\theta \quad \text{olur.}$$

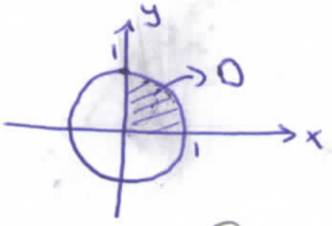
⊛

Kutupsal dönüşümle D bölgesinin alanı ise:

$$\iint_D dx\,dy=\int_\alpha^\beta\int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} r\,dr\,d\theta \quad \text{olur.}$$

⊛ $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dy\, dx = ?$

$D: \begin{array}{ll} x=1 & x=0 \\ y=\sqrt{1-x^2} & y=0 \end{array}$



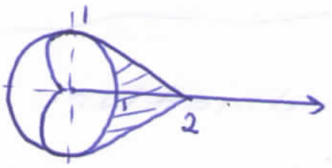
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$x^2+y^2 = r^2$
$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$I = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 e^{r^2} \cdot r\, dr\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{e^{r^2}}{2}\Big|_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{e}{2} - 1\right) d\theta$

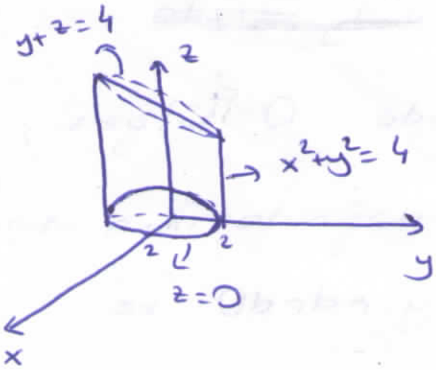
$= \frac{\pi}{4}(e-1)$

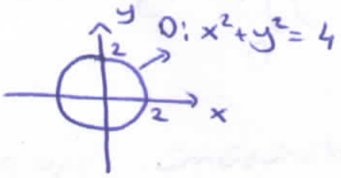
⊛ $r = 1+\cos\theta$ nın içinde, $r=1$ in dışında kalan R bölgesinin alanını 2 katlı integral ile hesaplayınız.



$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^{1+\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

⊛ $x^2+y^2=4$ silindiri ve $y+z=4$, $z=0$ düzlemleri tarafından sınırlanan cismin hacmini hesaplayınız.





$V = \iint_D (4-y)\, dy\, dx$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$x^2+y^2 = r^2$
$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$

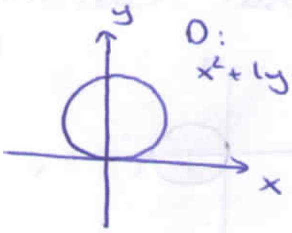
$= \int_0^{2\pi} \left(2r^2 - \frac{r^3}{3}\sin\theta \Big|_0^2\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{8}{3}\sin\theta\right) d\theta$

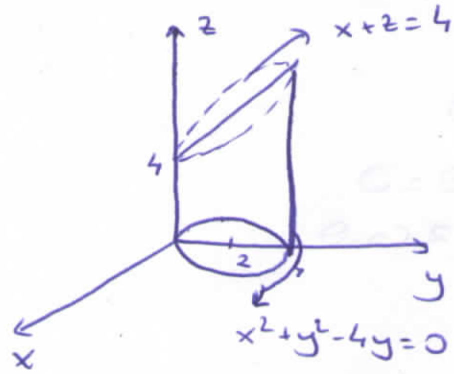
$= 8\theta + \frac{8}{3}\cos\theta \Big|_0^{2\pi}$

$= 16\pi$

* $x^2+y^2-4y=0$ silindiri, $x+z=4$, $z=0$ düzlemleri arasındaki cismin hacmini veren 2 katlı integral?

$x^2+y^2-4y+4-4=0 \Rightarrow x^2+(y-2)^2=4$





$$V=\iint_D (4-x)\,dy\,dx$$

$$\begin{pmatrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ dx\,dy=r\,dr\,d\theta \\ x^2+y^2=r^2 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{x^2+y^2}-4\underbrace{y}=0$

$r^2-4r\sin\theta=0$

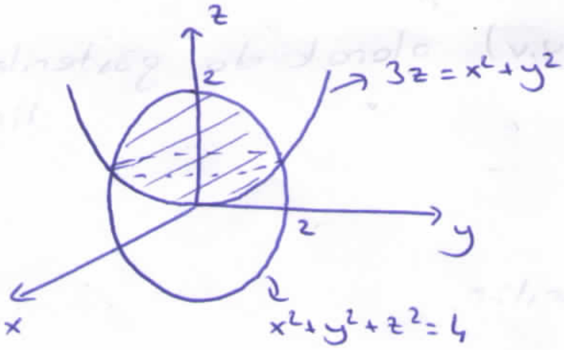
$r=0 \quad r=4\sin\theta$

$$V=\iint_D (4-x)\,dy\,dx=\int_0^{\pi}\int_0^{4\sin\theta}(4-r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

---

* $x^2+y^2+z^2=4$ ün altında $3z=x^2+y^2$ nin üstünde kalan cismin hacmi?

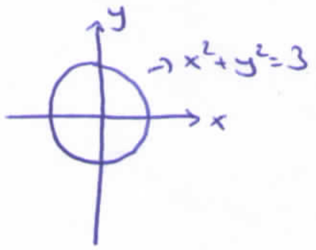
$x^2+y^2+z^2=4 \rightarrow$ Küre $\qquad 3z=x^2+y^2 \rightarrow$ Paraboloid



$$V=\iint_D\left(\sqrt{4-x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{3}\right)dy\,dx$$

$\left.\begin{matrix} 3z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{matrix}\right] \quad z^2+3z-4=0$

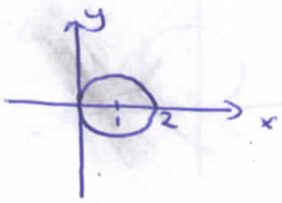
$\boxed{z=1} \rightarrow \underline{x^2+y^2=3}$ izdüşüm bölgesi D



$$\begin{pmatrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ dx\,dy=r\,dr\,d\theta \\ x^2+y^2=r^2 \end{pmatrix} \Rightarrow V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{r^2}{3}\right)r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{19}{6}\pi$$

(*) $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ integralini $D: x^2+y^2=2x$ bölgesinde kutupsal koordinatlara dönüştürerek yazınız.



$x^2+y^2-2x=0 \rightarrow (x-1)^2+y^2=1$

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ dx\,dy=r\,dr\,d\theta \\ x^2+y^2=r^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x^2+y^2-2x=0 \\ r^2-2r\cos\theta=0 \\ r=0 \quad r=2\cos\theta \end{array}$$

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2 . r\,dr\,d\theta$$

- **Jakobien Determinantı**

$x=g(u,v)$ ve $y=h(u,v)$ koordinat dönüşümünün Jakobien determinantı veya Jakobieni şöyledir:

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$J(u,v)$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ olarak da gösterilir.

NOT: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$ dir.

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

İki Katlı İntegralde Değişken Dönüşümü

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ integralinde $x=h(u,v)$, $y=g(u,v)$ değişken dönüşümü yapılırsa D bölgesi bir D' bölgesine dönüşür. Bu halde,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(h(u,v),g(u,v)).|J(u,v)|.du\,dv \quad \text{olur.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=h(u,v) \\ y=g(u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} D \longrightarrow D' \\ dx\,dy \longrightarrow |J(u,v)|\,du\,dv \end{array}}$$

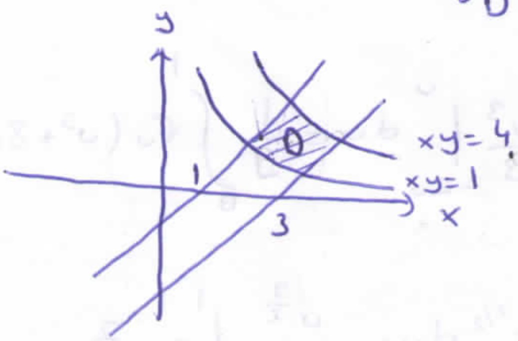
⊛ $\left\{\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}\right\}$ kutupsal dönüşümü ile $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ olduğunu gösteriniz.

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = \underline{\underline{r}}$$

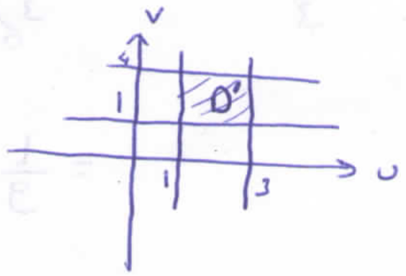
$$dx\,dy = |J(r,\theta)|\,dr\,d\theta = \underline{\underline{r\,dr\,d\theta}}$$

⊛ $D: \left\{\begin{array}{l} x-y=1 \\ x-y=3 \\ xy=1 \\ xy=4 \end{array}\right\}$ eğrilerinin I. bölgede sınırladığı bölge ise

$$\iint_D (x^2-y^2)\,dy\,dx = ?$$



$$\left.\begin{array}{l} x-y=u \\ xy=v \end{array}\right\} \Rightarrow D': \left.\begin{array}{ll} u=1 & u=3 \\ v=1 & v=4 \end{array}\right\}$$



$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ y & x\end{vmatrix}}=\frac{1}{x+y}$$

$$\iint_D (x^2-y^2)\,dx\,dy=\iint_{D'}(x^2-y^2)\cdot\frac{1}{x+y}\,du\,dv$$

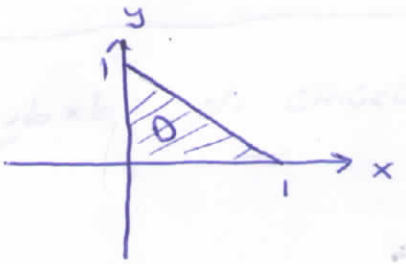
$$=\iint_{D'}(x-y)\,du\,dv=\int_1^3\int_1^4 u\,dv\,du=12$$

(*) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\cdot(y-2x)^2\,dy\,dx=?$ $\quad\left.\begin{array}{l}u=x+y\\ v=y-2x\end{array}\right\}$ dönüşümü yapalım.

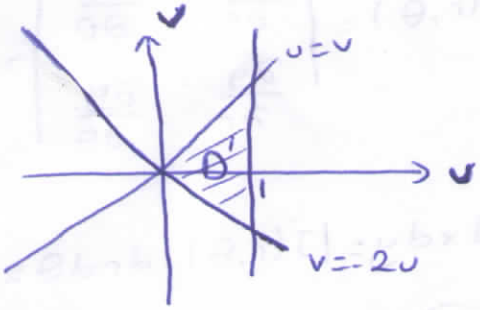
$$\Downarrow$$

$$x=\frac{u-v}{3}\qquad y=\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}$$

$D:\left.\begin{array}{l}x=1\\ x=0\\ y=1-x\\ y=0\end{array}\right\}$



D		D'
$x+y=1$	$\rightarrow$	$\boxed{u=1}$
$x=0$	$\rightarrow$ $u-v=0$ $\rightarrow$	$\boxed{u=v}$
$y=0$	$\rightarrow$ $2u+v=0$ $\rightarrow$	$\boxed{v=-2u}$



$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$$

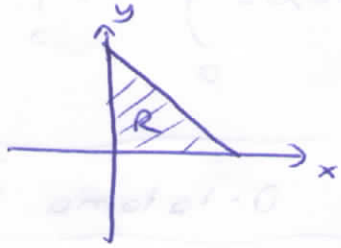
$$I=\int_0^1\int_{-2u}^{u}\sqrt{u}\cdot v^2\cdot\frac{1}{3}\,dv\,du=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{u}\cdot\left.\frac{v^3}{3}\right|_{-2u}^{u}du=\frac{1}{9}\int_0^1\sqrt{u}\,(u^3+8u^3)\,du$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^1 9\,u^{7/2}\,du=\left.\frac{u^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}\right|_0^1=\underline{\underline{\frac{2}{9}}}$$

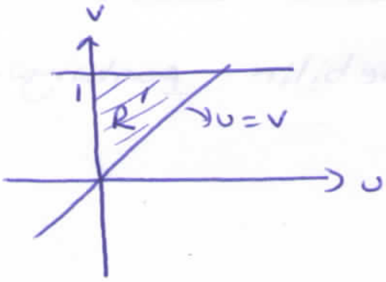
$\circledast$ $\iint_R e^{\frac{x}{x+y}}\,dx\,dy = ?$ $\quad R: \left\{ \begin{matrix} y=0 \\ x=0 \\ x+y=1 \end{matrix} \right\}$

$\left. \begin{matrix} x=u \\ x+y=v \end{matrix} \right\}$ dönüşümü yapalım.

$R: \left\{ \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ x+y=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$



R		R'
$x=0$	$\rightarrow$	$u=0$
$y=0$	$\rightarrow$	$u=v$
$x+y=1$	$\rightarrow$	$v=1$



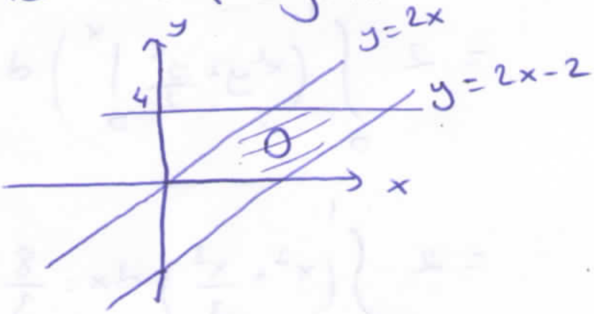
$$J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1$$

$$\iint_R e^{\frac{x}{x+y}}\,dx\,dy = \iint_{R'} e^{u/v}\,du\,dv = \int_0^1 \int_0^v e^{u/v}\,du\,dv$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{u/v}}{\frac{1}{v}} \Big|_0^v dv = \int_0^1 v(e-1)\,dv = \frac{v^2}{2}(e-1)\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

$\circledast$ $\int_0^4 \int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x-y}{2}\,dx\,dy$ integralini $u = \frac{2x-y}{2}$, $v = \frac{y}{2}$ dönüşümü ile hesaplayın.

$\left. \begin{matrix} y=4 & x=\frac{y}{2}+1 \\ y=0 & x=\frac{y}{2} \end{matrix} \right\}$



$u = \frac{2x-y}{2}$

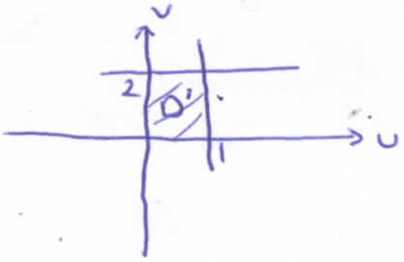
$v = \frac{y}{2}$

$\Downarrow$

$u+v = x$

$2v = y$

D		D'
$y=4$	$\longrightarrow$	$v=2$
$y=0$	$\longrightarrow$	$v=0$
$y=2x$	$\longrightarrow$	$u=0$
$y=2x-2$	$\longrightarrow$	$u=1$



(i.K.14)

$$\left.\begin{array}{l} x = u+v \\ y = 2v \end{array}\right\} \Rightarrow J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

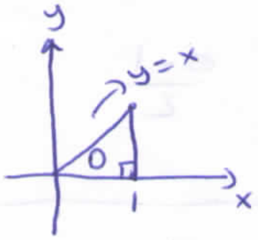
$$I = \iint_{D'} 2.u\, du\, dv = \int_0^1 \int_0^2 2u\, dv\, du = \int_0^1 2uv \Big|_0^2 du = \int_0^1 4u\, du = 2u^2 \Big|_0^1 = \underline{\underline{2}}$$

İki Katlı İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi

Bir D bölgesi üzerinde $f(x,y)$ integrallenebilir fonksiyonunun ortalama değeri:

$$\bar{f} = \frac{1}{D\text{'nin Alanı}} \cdot \iint_D f(x,y)\, dA \quad \text{dır.}$$

(*) Köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(1,1)$ de olan dik üçgende x^2+y^2 fonksiyonunun Ortalama değerini bulunuz.



$$\bar{f} = \frac{1}{D\text{'nin Alanı}} \cdot \iint_D (x^2+y^2)\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \int_0^1 \int_0^x (x^2+y^2)\, dy\, dx$$

$$= 2 \int_0^1 \left(x^2y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^x \right) dx$$

$$= 2 \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{8}{3} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$