Diferansiyel Denklemler

$y=f(x)$ fonksiyonu x değişkeni ve bu fonksiyonun sınırlı sayıda türevleri ile oluşmuş bağlantıya adi türevli dif. denk. ya da dif. denk. denir.

$$f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0 \text{ veya } f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

Mertebe: En yüksek türev mertebesi diferansiyel denklemin mertebesidir.
Derece: En yüksek türev mertebesinin derecesidir.

Lineer, Non Lineer: Fonksiyon (y) ve fonksiyonun türevleri $(y', y'', \ldots y^{(n)})$ birinci dereceden ise bu dif. denk. lineer aksi halde non-lineerdir.

$y'-2y=xe^x$	1. mert.,	1. derece,	lineer
$y''+xy'=0$	2. "	1. "	"
$y^{IV}+3y''+5y=x$	4. "	1. "	"
$y''+2xy'^2=e^x$	2. "	1. "	non-lineer
$y''^3+2^4xy'^2=e^x$	2. "	3. "	"

Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Dereceye göre sınıflandırma → lineer / non-lineer

Mertebeye göre " → 1. mert. dif. denk. / Yüksek mert. dif. denk.

Türevlerine göre " → Adi türevli dif. denk. / Kısmi türevli dif. denk. $f\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ldots\right)=0$

Katsayılarına göre " → Sabit katsayılı / Değişken katsayılı

Diferansiyel Denklemin Oluşması

Bir diferansiyel denklem ya bir matematik tanım sonucu ya bir doğa olayı gereği ya da bilgi birikiminin matematiksel gereği olarak ortaya çıkar.

$y=x.\sin x$ fonk. veriliyor. Bu fonk. ile 1. mertebeden bir dif. denk. yazınız.

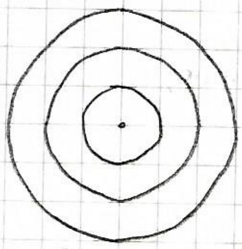
$$y'=\sin x+x.\cos x$$

$$x.y'=\underbrace{x\sin x}_{y}+x^2\cos x$$

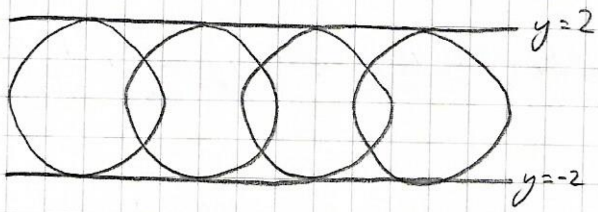
$$x.y'-y=x^2.\cos x$$

Eğri Ailesi

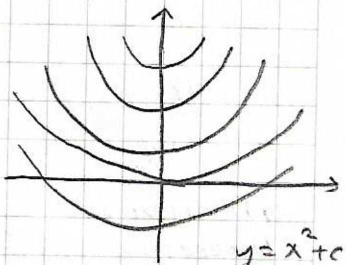
Aynı ortak özellikleri gösteren eğrilerin topluluğudur. Bunlar ifade edilirken bir yada daha fazla sayıda parametre kullanılır. Bu parametreler $c_1, c_2, \dots, c_n$ gibidir.



$x^2+y^2=c$



$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=4$



$y=x^2+c$

Bir eğri ailesinin dif. denk. elde etmek: Bu işlem; genel çözümü bu eğri ailesi olan dif. denklemi elde etmek demektir. Bunun için eğri ailesinin parametre sayısına bakılır. Eğri ailesinin parametre sayısı kadar türev alınır. Alınan bu türevler ve eğri ailesinin denklemi arasında parametreler yok edilir.

Örn: ① $y=c_1 \sin x + c_2 \cos x$ olan eğri ailesinin dif. denk. yazınız.
(Çözümü bu eğri ailesi olan dif. denk. yaz.)

② $y'=c_1 \cos x - c_2 \sin x$

c_1 ve c_2'yi yok et!!

③ $y''=-c_1 \sin x - c_2 \cos x$

$y+y''=0$ ✓

Dif. Denk. Çözümleri: Dif. denk. sağlayan $y=f(x)$ şeklindeki fonksiyondur.

a) Genel Çözüm: Mertebe kadar parametre (sbt) içerir.

b) Özel " : Genel çözümdeki sabitlere değer vererek elde edilir.

*) $y'=2x$ dif. denk. veriliyor. a) genel çözümü?
b) (0,0) dan geçen özel çözümünü bul.

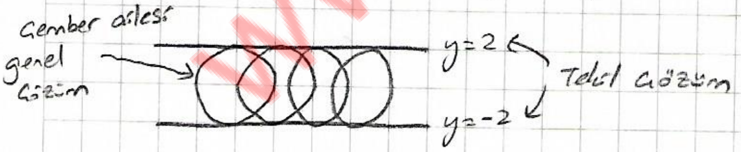
Çözüm: a) $\frac{dy}{dx}=2x \rightarrow dy=2x\,dx \rightarrow \int dy=\int 2x\,dx$

$y=x^2+c$ ✓ g.ç.

b) $(0,0) \rightarrow y=x^2+c \rightarrow 0=0^2+c \rightarrow \boxed{c=0} \rightarrow y=x^2$ (0,0) dan geçen ö.ç.

c) Tekil Çözüm: Bazı dif. denklemlerin genel çözümlerinden elde edilemeyen bir veya daha fazla çözümü olabilir. Bunlara tekil çözüm denir.

Örneğin; bazen genel çözüm eğrilerinin (eğri ailesinin tüm üyeleri) tümüne birden teğet olan doğru veya eğriler tekil çözümdür.



1- Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

$f(x,y,y')=0$ veya $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ şeklindedir.

1°) Değişkenlerine Ayrılabilir Diferansiyel Denklemler

$\int f(x).dx + \int g(y).dy = \int 0$ haline getirilir ve integral ile çözülür.

"$F(x) + G(y) = C$" Genel Çözüm

★ $dy + e^{x+y}dx = 0$

$dy + e^x.e^y.dx = 0$

$e^x dx = -\dfrac{dy}{e^y}$

$\int e^x dx = \int -e^{-y}dy$

$e^x = e^{-y} + C$ ✓

★ $y = \ln y'$

$e^y = \dfrac{dy}{dx}$

$dx = \dfrac{dy}{e^y}$

$\int dx = -\int -e^{-y}dy$

$x = -e^{-y} + c$ ✓

★ Herhangi bir noktasındaki teğetinin eğimi $\dfrac{x(1+y)}{\sqrt{5-x^2}}$ olan ve $A(2,0)$ dan geçen eğrinin denklemi = ?

$y' = \dfrac{x(1+y)}{\sqrt{5-x^2}}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(1+y)}{\sqrt{5-x^2}}$

$\int \dfrac{dy}{(1+y)} = \int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{5-x^2}}$ $\qquad 5-x^2 = u^2$, $-\cancel{2}x\,dx = \cancel{2}u\,du$ $\qquad \int \dfrac{dy}{(1+y)} = \int \dfrac{-\cancel{u}\,du}{\sqrt{\cancel{u^2}}}$

$\ln|1+y| = -u + c$

$\boxed{\ln|1+y| = -\sqrt{5-x^2} + c}$ g.ç.

$\ln 1 = -\sqrt{5-2^2} + c$

$0 = -1 + c$ $\qquad c = 1$

$\boxed{\ln|1+y| = -\sqrt{5-x^2} + 1}$

★ $\dfrac{dy}{dx} + e^x.y = e^x y^2 \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = e^x(y^2-y) \rightarrow \int \dfrac{dy}{y(y-1)} = \int e^x dx$

$\dfrac{1}{y(y-1)} = \dfrac{A}{y}_{(y-1)} + \dfrac{B}{y-1}_{(y)}$ $\qquad 1 = \underbrace{(A+B)}_{0}y \underbrace{-A}_{1}$ $\qquad A=-1$, $B=1$

$\int \dfrac{-1}{y}.dy + \int \dfrac{1}{y-1}.dy = \int e^x.dx$

$-\ln|y| + \ln|y-1| = e^x + c$

GIPTA

2°) Değişkenlerine ayrılabilir hale getirilebilen dif. denk.

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = ax+by+c \\ du = adx+bdy \end{array}}$$

dönüşümü ile değişkenlerine ayrılabilir hale getirilerek çözülür.

★ $y' = \tan^2(x+y)$

$u = x+y$

$du = dx+dy \rightarrow dy = du-dx$

$\frac{dy}{dx} = \tan^2(x+y) \rightarrow dy = \tan^2(x+y).dx$

$du-dx = \tan^2(u).dx$

$du = \tan^2(u)dx+dx$

$du = (1+\tan^2(u))dx$

$\int \frac{du}{1+\tan^2 u} = \int dx$

$\int \frac{du}{\sec^2 u} = \int dx$

$\int \cos^2 u \, du = \int dx \rightarrow \int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}2\cos 2u\right) du = \int dx$

$\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u = x+c \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{4}\sin 2(x+y) = x+c}$

$(\tan x)' = 1+\tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = 1+\cot^2 x = -\mathrm{cosec}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\sec x)' = \sec x.\tan x$

$\int \sec x.dx = \ln(\sec x+\tan x)+c$

$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1-2\sin^2 u$

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a}+c$

★ $\frac{dy}{dx} = (4x+y-2)^2$

$4x+y-2 = u$

$4dx+dy = du \rightarrow dy = du-4dx$

$dy = (4x+y-2)^2.dx$

$du-4dx = u^2.dx$

$du = (u^2+4).dx$

$\int \frac{du}{u^2+4} = \int dx$

$\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,u = x+c$

$\boxed{\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(4x+y-2) = x+c}$

3°) Homojen Dif. Denk.

Not: x yerine λx
y " λy $f(x,y)$ fonksiyonu için $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

bu fonksiyona n. dereceden homojen fonk. denir.

★ $f(x,y) = x^3 + 2x^2y - xy^2 - 5y^3$ homojen?

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 + 2\lambda^2 x^2 \lambda y - \lambda x \lambda^2 y^2 - 5\lambda^3 y^3$$
$$= \lambda^3 (x^3 + 2x^2y - xy^2 - 5y^3)$$
$$= \lambda^3 f(x,y) \quad \text{homojen (3. derece)}$$

★★ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ dif. denkleminde $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları aynı dereceden fonksiyonlar ise bu dif. denk. homojendir.

veya

$\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ haline gelirse ise homojendir.

$u = \dfrac{y}{x} \rightsquigarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} y = u.x \\ dy = u\,dx + x\,du \end{array}}$ dönüşümü ile değişkenlerine ayrılarak çözülür.

★ $\dfrac{(x^3+y^3)dx - xy^2 dy}{x^3} = \dfrac{0}{x^3}$ $\qquad \dfrac{y}{x} \to u \qquad y = u.x$

$dy = u\,dx + x\,du$

$$\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3\right)dx - \left(\frac{y}{x}\right)^2 dy = 0$$

$$(1+u^3)dx - u^2(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(1 + \cancel{u^3} - \cancel{u^3})dx + (-u^2x)du = 0 \to dx = u^2 x\,du \to \int \frac{dx}{x} = \int u^2 du$$

$$\ln|x| = \frac{u^3}{3} + C$$

$$\boxed{\ln|x| = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + C}$$

★ $\dfrac{x.\cos\left(\frac{y}{x}\right).y'}{x} = \dfrac{y.\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x}{x}$

$$\cos\left(\frac{y}{x}\right).\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.\cos\left(\frac{y}{x}\right) + 1$$

$$\cos\left(\frac{y}{x}\right).dy = \left(\frac{y}{x}.\cos\left(\frac{y}{x}\right) + 1\right)dx \qquad \frac{y}{x} = u \rightsquigarrow \begin{array}{l} y = u.x \\ dy = u\,dx + x\,du \end{array}$$

$$\cos u.(u\,dx + x\,du) = (u.\cos(u) + 1)dx$$

$$x\cos u\,du = (\cancel{u\cos u} + 1 - \cancel{u\cos u})dx \to \int \cos u\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\sin u = \ln|x| + c$$

$$\boxed{\sin\frac{y}{x} = \ln|x| + c}$$