⇒ Lineer Cebir ⇐

Matrisler

Tanım: Elemanları sayılar, değişkenler veya fonksiyonlar olan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki dizeli tabloya matris denir.

$m \times n \rightarrow$ mertebesi $\quad A = [a_{ij}] \quad i = 1, \ldots, m$; $\; j = 1, \ldots, n$

Satır Matris: Tek satırdan oluşur.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \quad 1 \times n$$

Sütun Matris: Tek sütundan oluşur.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

Sıfır Matris: Tüm elemanları sıfır olan matris.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

"O" diye de gösterilir.

Kare Matris: Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matris.

$$A = [a_{ij}]^{n \times n} \qquad A = [a_{ij}] \quad i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, n$$

$a_{11}, a_{22}, a_{33} \ldots a_{nn} \Rightarrow$ asal (esas) köşegen elemanları

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Bir kare matriste asal köşegen elemanları dışındaki tüm elemanlar sıfır ise bu matrise "köşegen matris" denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = k \quad (k \in \mathbb{R})$ ise matrise "skaler matris" denir.

$a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$ ise "birim matris" denir. "I_n"

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eşit Matrisler: Aynı mertebeden, karşılıklı elemanları eşit olan matrislerdir.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & t \\ 3 & s & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & x & 7 \\ 3 & -2 & y \end{bmatrix}$$

$A=B$ için;
$t=7$
$x=-1$
$s=-2$
$y=1$

Matrislerin Toplamı ve Farkları

A ve B aynı mertebeden iki matris olmak üzere

$A=[a_{ij}]$ $i=1,\dots,m$
$B=[b_{ij}]$ $j=1,\dots,n$

$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]^{m\times n}$

$\lambda \in R$ olsun $\quad \lambda A=[\lambda a_{ij}] \qquad A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 3A=\begin{bmatrix} -3 & 9 & 21 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\lambda=-1 \rightarrow \quad \lambda B=(-1)B=-B \qquad A+(-1)B=A-B$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A-B=\begin{bmatrix} 2 & -7 & -7 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

Teorem: A,B,C aynı mertebeden matrisler ve λ_1, λ_2 skaler olmak üzere,

i) $A+B=B+A$ (değişme)
ii) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (birleşme)
iii) $A+O=A$
iv) $A-A=0$
v) $\lambda_1(A+B)=\lambda_1 A+\lambda_1 B$
vi) $(\lambda_1+\lambda_2)A=\lambda_1 A+\lambda_2 A$
vii) $(\lambda_1\lambda_2)A=\lambda_1(\lambda_2 A)$
viii) $1.A=A$

Matris Çarpımı

$A=[a_{ij}]$ $m\times r$ mertebesinde $B=[b_{ij}]$ $r\times n$ mertebesinde matrisler olsun

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\dots+a_{ir}b_{rj}=\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

$$A\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2r} \\ \boxed{a_{i1}} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ir} \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix} \qquad B\begin{bmatrix} b_{11} & b_{1j} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{2j} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \\ b_{r1} & b_{rj} & b_{rn} \end{bmatrix}$$

$AB=[c_{ij}]$ $m\times n$ mertebesinde

1. matrisin sütun sayısı 2. matrisin satır sayısına eşit ise iki matris çarpılabilir.

Örnek: $A\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad B\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad AB=\begin{bmatrix} -2+0 & -4+0 \\ 1+0 & 2+15 \\ -4+0 & -8+9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 17 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

Teorem: A $m\times n$ matris, B ve C $n\times r$ matrisler, D $r\times t$ matris ve λ bir skaler olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $A(BD)=(AB)D$
ii) $A(B+C)=AB+AC$
iii) $(B+C)D=BD+CD$
iv) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$
v) $A.0=0$
vi) Genellikle $AB \neq BA$

Tanım: A bir kare matris olmak üzere, A'nın kendisiyle n defa çarpılmasıyla elde edilen matrise A'nın kuvveti denir.

$$\underbrace{AA\ldots A}_{n \text{ defa}} \rightarrow A^n$$

$$A^m . A^n = A^{m+n} \quad ; \quad (A^k)^l = A^{kl} \qquad (m,n,k,l \in N)$$

Örnek:

$$A \begin{bmatrix} k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & k & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & k \end{bmatrix}_{n\times n} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = kI_n$$

$$B \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix} \qquad AB = (kI_n)B = k(I_nB) = kB$$

Tanım: Bir A matrisinin aynı numaralı satırlarıyla sütunlarının yer değiştirmesi ile elde edilen matrise transpoze matris denir. (devrik)

A^T, A^t veya A' şeklinde gösterilir.

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \qquad A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$$

Örnek:

$$A \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3} \rightarrow A^T \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Teorem: A ve B aynı mertebeden matrisler λ skaler $(\lambda \in R)$ ol. üz.

i) $(A+B)^T = A^T + B^T$

ii) $(A^T)^T = A$

iii) $(\lambda A)^T = \lambda . A^T$

iv) A ve B çarpılabilir iki matris ol. üz. $(AB)^T = B^T A^T$ dir.

Soru: A ve B matrisleri $AB=A$ ve $BA=B$ eşitliklerini sağlıyorsa, $B^TA^T = A^T$ ve $A^TB^T = B^T$ olduğunu gösteriniz.

$$A.B = A \Rightarrow \underbrace{(AB)^T}_{B^T.A^T} = A^T \qquad B^T.A^T = A^T \checkmark$$

$$BA = B \qquad (BA)^T = B^T \qquad A^TB^T = B^T \checkmark$$

Tanım: $A^T = A$ olacak şekilde A kare matrisine "simetrik matris" denir.

$A = [a_{ij}]$
$A^T = [a_{ji}]$ her i,j için $(a_{ij} = a_{ji})$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Simetrik matris.}$$

Eğer $A^T = -A$ ise A kare matrisine "ters simetrik matris" denir.

Her i,j için $a_{ij} = -a_{ji}$

k → skaler
A → simetrik matris → k.A = simetrik matris $A^T = A$

$(kA)^T = k.A^T = kA$

$A^T = -A \Rightarrow k.A$ → ters simetrik matris

$(kA)^T = k.A^T = k.(-A) = -kA$

Tanım: Bir A kare matrisinde $A^{p+1} = A$ olacak şekilde pozitif bir p tamsayısı varsa A'ya "periyodik matris" denir. Bu koşulu sağlayan en küçük pozitif p tamsayısına A'nın periyodu denir.

Özel olarak $A^2 = A$ ise A'ya "idempotent matris" denir.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \text{idempotent matris}$$

Tanım: Bir A kare matrisinde $A^q = 0$ olacak şekilde pozitif bir q sayısı varsa A'ya "nilpotent matris" denir.
q'ya nilpotent matrisin derecesi (indeksi) denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow 3.\ \text{dereceden nilpotent matris}$$

Tanım: $A^2 = I$ A kare matrisine involut (involutif) matris denir.

$$\boxed{\begin{matrix} A.A^{-1} = I \\ A^{-1}.A = I \end{matrix}}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & k & k \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & k \end{bmatrix}$ matrisinin involut matris olması için k = ?

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & k & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-1-2 & 2-2 & 2-1+k \\ -2+2 & -1+2 & -1-k \\ -4+2-2k & -2+2k & -2+2+k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$k = -1$

Tanım: Elemanları kompleks sayılar olan bir A matrisinde her elemanın yerine eşleniği yazılarak elde edilen matrise A'nın eşlenik matrisi yada eşleniği denir. "$\bar{A}$" olarak gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} i & -i & 2-i \\ 3+i & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} -i & i & 2+i \\ 3-i & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Teorem: A, B iki matris ve k herhangi bir skaler olsun.

i) $\bar{\bar{A}} = A$

ii) $(\overline{kA}) = \bar{k}.\bar{A}$ iv) $\overline{AB} = \bar{A}.\bar{B}$

iii) $(\overline{A+B}) = \bar{A} + \bar{B}$