k → skaler
A → simetrik matris

→ $k.A$ = simetrik matris $A^T = A$

$(kA)^T = k.A^T = kA$

$A^T = -A \Rightarrow k.A$ → ters simetrik matris

$(kA)^T = k.A^T = k.(-A) = -kA$

Tanım: Bir A kare matrisinde $A^{p+1} = A$ olacak şekilde pozitif bir p tamsayısı varsa A'ya "periyodik matris" denir. Bu koşulu sağlayan en küçük pozitif p tamsayısına A'nın periyodu denir.

Özel olarak $A^2 = A$ ise A'ya "idempotent matris" denir.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \text{idempotent matris}$$

Tanım: Bir A kare matrisinde $A^q = 0$ olacak şekilde pozitif bir q sayısı varsa A'ya "nilpotent matris" denir.

q'ya nilpotent matrisin derecesi (indeksi) denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{3. dereceden nilpotent matris}$$

Tanım: $A^2 = I$ A kare matrisine involut (involutif) matris denir.

$$\boxed{\begin{matrix} A.A^{-} = I \\ A^{-}.A = I \end{matrix}}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & k \end{bmatrix}$ matrisinin involut matris olması için $k = ?$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-1-2 & 2-2 & 2-1+k \\ -2+2 & -1+2 & -1-k \\ -4+2-2k & -2+2k & -2+2+k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$k = -1$

Tanım: Elemanları kompleks sayılar olan bir A matrisinde her elemanın yerine eşleniği yazılarak elde edilen matrise A'nın eşlenik matrisi yada eşleniği denir. "$\bar{A}$" olarak gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} i & -i & 2-i \\ 3+i & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} -i & i & 2+i \\ 3-i & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Teorem: A, B iki matris ve k herhangi bir skaler olsun.

i) $\bar{\bar{A}} = A$

ii) $\overline{(kA)} = \bar{k}.\bar{A}$

iii) $\overline{(A+B)} = \bar{A} + \bar{B}$

iv) $\overline{AB} = \bar{A}.\bar{B}$

Tanım: $(\bar{A})^T = A$ olacak şekilde A kare matrisine "Hermitian" matris denir.

$$A = [a_{ij}] \qquad (\bar{A})^T = [\overline{a_{ji}}]$$
$$\bar{A} = [\overline{a_{ij}}] \qquad a_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

$(\bar{A})^T = -A$ ise ters Hermitian matris denir.

$$a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$$

Soru: A ters Hermitian matris olmak üzere $(-i)A$ nın Hermitian matris olduğunu gösteriniz.

$$(\bar{A})^T = -A \quad ; \quad (\overline{(-i)A})^T = (\overline{-i}\,.\,\bar{A})^T = (i\,.\,\bar{A})^T = i\,.\,\underbrace{(\bar{A})^T}_{-A} = -i\,.\,A$$

Tanım: A nxn mertebesinde bir matris olmak üzere

$AB = BA = I_n$ bağıntısını sağlayan B matrisine A'nın tersi (inversi) denir.

$A^{-1} = B$ A'nın tersi varsa → regüler matris (terslenebilir)
tersi yoksa → singüler matris denir. (tekil)

Bir matrisin tersi varsa tektir. (Bir tane vardır)

Örnek:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times4}$$ matrisleri veriliyor.

i) AB çarpımının tipini belirleyiniz.
ii) AB 'nin i. satır j. sütundaki elemanı c_{ij} olsun. Buna göre c_{13}, c_{21} ve c_{24} elemanlarını hesaplayınız.

i) 2x4 tipindedir.
ii) $-3 = c_{13}$ $\quad 3 = c_{21}$, $\quad 2 = c_{24}$

Örnek:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
i) $AA^T = ?$
ii) $A^TA = ?$

Tanım: Bir matrisin satırları veya sütunları ile yapılan ve elemanter satır veya elemanter sütun işlemleri denilen işlemler aşağıda gösterilmiştir.

i) Bir matrisin i. satırı ile j. satırının yerlerini değiştirmek ; H_{ij}
ii) " " i. sütunu " j. sütununun " " ; K_{ij}
iii) " " i. satırını bir λ skaleri ile çarpmak ; $H_i(\lambda)$
iv) " " j. sütununu " α " " " ; $K_j(\alpha)$
v) " " j. satır elemanlarını bir λ skaleri ile çarpıp i. satır elemanlarına eklemek ; $H_{ij}(\lambda)$
vi) " " j. sütun elemanlarını bir α skaleri ile çarpıp i. sütun elemanlarına eklemek ; $K_{ij}(\alpha)$

Tanım: Bir A matrisinde art arda elemanter satır (veya sütun) işlemleri uygulanarak elde edilen matrise A'ya satırca (veya sütunca) denk matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -8 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{22}{7} \end{bmatrix} = B$$

$H_{21}(-3)$ $H_{31}(-4)$ $H_2(-\frac{1}{7})$ $H_{32}(8)$ $A \sim B$

Tanım: A, $m \times n$ tipinde bir matris olsun;

i) A matrisinin bir satırındaki elemanlarının hepsi sıfır ise bu satır, matrisin en son satırı olmalıdır.
ii) A matrisinin sıfırdan farklı ilk satırının ilk elemanı (veya esas elemanı) 1 olmalıdır.
iii) A matrisinin sıfırdan farklı her satırında ilk elemanı bir önceki satıra göre sağa doğru yer almalıdır.
iv) A matrisinin sütununun birisi ilk elemanı içeriyorsa o sütundaki diğer elemanlar sıfırdır.

Bu taktirde $m \times n$ tipindeki A matrisine i), ii) ve iii) şıklarını sağlıyor ise satırca indirgenmiş formdadır denir. Eğer bunlarla birlikte iv) de sağlanıyor ise matrise satırca indirgenmiş eşolon formdadır denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 & \cdots & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

satırca indirgenmiş form

satırca indirgenmiş eşolon form

Örnek:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\3&2&1&2\\2&-1&2&5\\5&6&3&2\\1&3&-1&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&-4&-2&2\\0&-5&0&5\\0&-4&-2&2\\0&1&-2&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&-2&-3\\0&-5&0&5\\0&-4&-2&2\\0&-4&-2&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&5&6\\0&1&-2&-3\\0&0&-10&-10\\0&0&-10&-10\\0&0&-10&-10\end{bmatrix}$$

$H_{21}(-3)$ $H_{31}(-2)$ $H_{41}(-5)$ $H_{51}(-1)$ $\quad$ H_{25} $\quad$ $H_{32}(5)$ $H_{42}(4)$ $H_{52}(4)$ $H_{12}(-2)$ $\quad$ $H_{43}(-1)$ $H_{53}(-1)$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&5&6\\0&1&-2&-3\\0&0&-10&-10\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&5&6\\0&1&-2&-3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \text{Satırca indirgenmiş eşolon form}$$

$H_3(-\frac{1}{10})$ $\quad$ $H_{23}(2)$ $H_{13}(-5)$

Tanım: Satırca indirgenmiş bir matrisin sıfırdan farklı satırlarının sayısına "matrisin rankı" denir.

$A \to r_A$ ve rank A $\quad$ Ör: Yukarıdaki A matrisinin rankı $=3$

Tanım: Bir matrise elementer satır ve sütun işlemleri uygulanarak matris hem satırca hem de sütunca indirgenmiş eşolon forma getirilebilir.

$$[I_k, 0], \quad \begin{bmatrix}I_k\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}I_k&0\\0&0\end{bmatrix}, \quad I_k \qquad \begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\\begin{matrix}0&0\end{matrix}&0\end{bmatrix} \to I_2$$

Matrisi normal forma getirme denir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1&3&-1&5\\2&6&0&4\\-1&-3&2&-8\end{bmatrix}$ normal forma dönüştürelim.

$H_{21}(-2)$ $H_{31}(1)$

$$A\sim\begin{bmatrix}1&3&-1&5\\0&0&2&-6\\0&0&1&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&-1&5\\0&0&1&-3\\0&0&2&-6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&0&2\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&3&2\\0&1&0&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

H_{23} $\quad$ $H_{12}(1)$ $H_{32}(-2)$ $\quad$ K_{23} $\quad$ $K_{31}(-3)$, $K_{41}(-2)$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad r_A=2 \quad \begin{bmatrix}I_2&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$K_{42}(3)$

Teorem: Bir kare matrisin tersinin (inversinin) bulunabilmesi için gerek ve yeter koşul birim matrise satırca denk olmasıdır. n. mertebeden bir regüler A matrisi için $[A:I_n]\sim[I_n:A^{-1}]$ olacak şekilde bulunan A^{-1} matrisi A'nın tersidir.

Örnek: $\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}$ matrisinin tersi?

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&3&1&0&0\\1&4&3&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&3&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&3&4&-3&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$H_{21}(-1)$ $H_{31}(-1)$ $\quad$ $H_{12}(-3)$ $\quad$ $H_{13}(-3)$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&7&-3&-3\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right] \qquad A^{-1}=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$