

DETERMINANTLAR

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ * Kare matrislerin determinantları tanımlıdır.
 $|A| = |a_{ij}|$

$A = [a]_{1 \times 1} \Rightarrow |A| = |a| = a$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2} \Rightarrow |A| = ad - bc \quad \left(|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right)$

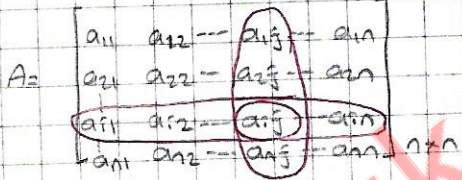
$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$|A| = a_{11} \underbrace{(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32})}_{|M_{11}|} - a_{12} \underbrace{(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31})}_{|M_{12}|} + a_{13} \underbrace{(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})}_{|M_{13}|}$

Tanım: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ mertebesinde bir matris olsun. A matrisinin a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun çıkarılmasıyla elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ matrisi M_{ij} ile gösterelim.
 M_{ij} matrisinin determinantına a_{ij} elemanının "Minör" denir.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ değerine a_{ij} elemanının es çarpanı veya kofaktörü denir.



$M_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$

a_{ij} 'nin minörü $|M_{ij}|$

Örnek: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$
 $= 1(-1-4) + 2(-3-4) = -19$

Teorem: $n \geq 2$ olmak üzere $n \times n$ mertebesindeki A kare matrisinin determinantı

$\det(A) = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$
 $i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, n$

Determinantın Özellikleri

Teorem = $|A| = |A^T|$ 'dir.

Teorem = i) A matrisinin herhangi bir satır (veya sütun) elemanlarının tümü "0" ise $|A| = 0$ 'dir.

ii) A matrisinin herhangi iki satırı (veya sütunu) aynı ise $|A| = 0$

iii) A, alt köşegen veya üst köşegen matris ise $|A|$, köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.

A matrisinin herhangi iki satırı (veya sütunu) orantılı ise $|A| = 0$

Teorem 2 i) Bir matrisin herhangi iki satırı (veya sütunu) yer değiştirilirse determinanti de işaret değiştirir.

ii) Bir matrisin herhangi bir satırı (veya sütunu) bir k skali ile çarpılırsa determinanti de k ile çarpılır.

* iii) Bir matrisin herhangi bir satırı (veya sütunu) $k \neq 0$ ile çarpılır ve başka bir satıra (veya sütuna) eklenirse determinantın değeri değişmez.

$$A = [a_{ij}] \quad kA = [ka_{ij}] = \begin{bmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \dots & ka_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$k|A| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} \quad |kA| = k^n |A|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = -40 + 35 = -5$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 3 & -5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 3 & -5 & 7 \end{vmatrix} = -35 + 40 = +5$$

3x3	4x4
+ - +	+ - + -
- + -	- + - +
+ - +	+ - + -
- + -	- + - +

Teorem 3 Bir determinantın herhangi bir satır (veya sütun) elemanları başka bir satır (veya sütun) elemanlarının ek çarpımlarıyla çarpılacak elde edilen terimlerin toplamı sıfırdır.

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$$

$$-1 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (1-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 16 - 10 = 0$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Teorem 2} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(i-1)} & a_{1i} + b_{1i} & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(i-1)} & a_{2i} + b_{2i} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(i-1)} & a_{ni} + b_{ni} & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & a_{1i} & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & a_{2i} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & a_{ni} & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(i-1)} & b_{1i} & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(i-1)} & b_{2i} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(i-1)} & b_{ni} & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{Teorem 3} \quad |AB| = |A| \cdot |B|$$

$$\text{Teorem 4} \quad A^{-1} \text{ mevcut ise } A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow |A| |A^{-1}| = |A^{-1}| |A| = |I| = 1 \text{ mevcut ve}$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1} \quad |A| \neq 0 \quad / \quad \text{matrisin tersi olması için gerek ve yeter şart } \rightarrow |A| \neq 0$$

Örnek 2

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a+b & b+c \\ b & b+c & c+a \\ c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

det. özelliklerinden yararlanarak hesaplayınız.

$$= \begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & b+c & c \\ c & c+a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a+b & c \\ b & b+c & a \\ c & c+a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & b \\ b & b & c \\ c & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & c & c \\ c & a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & c \\ b & b & a \\ c & c & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

2 ve 3'ü topluyup
1'e ekledik

$$= (a+b+c) [(c-b)(b-c) - (a-c)(a-b)] = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$