

## Artan / Azalan Fonksiyonlar

T12

$f(x)$ ,  $[a,b]$  de sürekli,  $(a,b)$  de türevli olsun.

\*  $\forall x \in (a,b)$  için  $f'(x) > 0$  ise  $f(x)$   $[a,b]$  de artandır.

\*  $\forall x \in (a,b)$  için  $f'(x) < 0$  "  $f(x)$   $[a,b]$  de azalandır.

⊗  $f(x) = 6x^2 - x^4 - 4$  fonksiyonunun artan/azalan olduğu aralıklar?

$$f'(x) = 12x - 4x^3 = 0 \quad x=0 \quad x=\pm\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	0	-
f(x)	↗	↘	↗	↘	

$(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}] \rightarrow$  artan

$[-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, \infty) \rightarrow$  azalan

(Not: Aralıkları eşik aralık olarak da yazabiliriz!)

⊗  $f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 15x^3$  artan/azalan old. aralıklar?

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^3 + 45x^2 = 15x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\boxed{x=0} \text{ G.K.K.}$$
$$\boxed{x=3}$$
$$\boxed{x=1}$$

x	$-\infty$	0	1	3	
f'	+	0	-	0	+
f	↗	↗	↘	↗	

$(-\infty, 1) \cup (3, \infty) \rightarrow$  Artan

$(1, 3) \rightarrow$  Azalan

(Not)

## Ters Fonksiyonlar ve Özellikleri:

(T13)

### Bire-bir Fonksiyon:

$O$  tanım kümesinde  $x_1 \neq x_2$  iken  $f(x_1) \neq f(x_2)$  ise  $f$  fonksiyonu  $O$  tanım kümesinde bire-bir fonksiyondur denir.

\*  $y=f(x)$  in grafiği her yatay doğruyu ancak ve ancak en fazla bir kere keserse bire-birdir.

\* Bir fonksiyon bir  $I$  aralığında bire-bir ise  $o$  aralıkta artan veya azalandır.

### Ters Fonksiyon:

$f$ ,  $O$  tanım kümesi üzerinde görüntü kümesi  $R$  olan bire-bir bir fonk. olsun. Ters fonksiyon  $f^{-1}$  şöyle tanımlanır:  
eğer  $f(b)=a$  ise  $f^{-1}(a)=b$  dir.

$f^{-1}$  nin tanım kümesi  $R$ , görüntü kümesi  $O$  dir.

### Özellikler:

①  $y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x=f(y)$

②  $f^{-1}$  nin tanım kümesi,  $f$  in değer kümesidir.

③ " " değer " " " " tanım "

④  $f^{-1}(f(x))=x$ ,  $f(f^{-1}(x))=x$  dir.

⑤  $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$  dir.

⑥  $f$  ve  $f^{-1}$  nin grafikleri  $x=y$  doğrusuna göre simetrik-tirler.

### Ters Fonksiyonu Bulma:

$f(x)$  den  $f^{-1}(x)$  i bulmak için:

①  $y=f(x)$  den  $x$  çözülür. Yani  $x=f^{-1}(y)$  bulunur.

②  $y$  ile  $x$  yer değiştirilir,  $y=f^{-1}(x)$  oluşturulur.

## Ters Fonksiyonun Türevi:

T14

Eğer  $f$ 'in tanım kümesi  $I$  ise ve  $I$  üzerinde  $f'(x)$  varsa ve hiç  $0$  olmuyorsa,  $f^{-1}$  tanım kümesinin her noktasında ( $f$ 'in görüntü kümesinde) türevlenebilir; ve türevi

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ dir.}$$

$$\star a = f^{-1}(b) \text{ için } (f(a) = b)$$

$$\star (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)} \star$$

İspat:

$$f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1 \Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\otimes f(x) = x^2 \quad (x > 0) \Rightarrow (f^{-1}(x))' = ?$$

I. Yol

$$x^2 = y \rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} \Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

II. Yol

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$\otimes f(x) = x^3 - 2$  olsun.  $f^{-1}(x)$  için formül bulmadan  $(f^{-1})'\left(\frac{6}{b}\right)$  değerini bulunuz.

$$6 = x^3 - 2 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \rightarrow a$$

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{12}$$

$$f'(x) = 3x^2$$



## Logaritmik Türev

T15

① Çarpım, bölüm, kuvvet içeren formüllerle verilmiş olan pozitif fonksiyonların türevleri; türev almadan önce iki tarafın doğal logaritması alınarak daha kolay bulunur.

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \dots f_n(x)$$

$$\ln f(x) = \ln f_1(x) + \ln f_2(x) + \dots + \ln f_n(x)$$

↓

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \dots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$$

②  $f(x) = (g(x))^{h(x)} \Rightarrow \ln f(x) = h(x) \cdot \ln g(x)$

↓

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

↓

$$f'(x) = f(x) \left[ h'(x) \cdot \ln g(x) + \frac{h(x) \cdot g'(x)}{g(x)} \right]$$

\*  $f(x) = \frac{(x^2+1) \cdot (x-1)^2}{x^4+4} \quad (x \neq 1) \Rightarrow f'(x)$  türevini logaritmik türev ile bulunuz.

$$\ln f(x) = \ln(x^2+1) + \frac{\ln(x-1)^2}{2} - \ln(x^4+4)$$

↓

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4x^3}{x^4+4}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(x-1)^2}{x^4+4} \cdot \left[ \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4x^3}{x^4+4} \right]$$

$$\textcircled{*} f(x) = x^x \rightarrow f'(x) = ?$$

T16

$$\ln f(x) = \ln x^x = x \ln x$$

↓ Töröv

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = x^x [\ln x + 1]$$

$$\textcircled{*} y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \Rightarrow y' = ?$$

$$\ln y = \ln (\ln x)^x - \ln (x)^{\ln x}$$

$$\ln y = x \ln (\ln x) - \frac{\ln x \cdot \ln x}{(\ln x)^2}$$

↓ Töröv

$$\frac{y'}{y} = \ln (\ln x) + x \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \left[ \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \right] \cdot \left( \ln (\ln x) + \frac{1}{x} - \frac{2 \ln x}{x} \right)$$

## Belirsiz Şekiller

T17

$\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$  şeklindeki ifadeler belirsizdirler (aritmetik olarak bir anlamı yoktur).

### Belirsizlik Tipi

### Örnek

$$\frac{0}{0}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

① Cebirsel işlemler

$$\frac{\infty}{\infty}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot x^2}$$

② L'Hopital ile çözülür

$$0 \cdot \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Cebirsel işlemler ile

$$\infty - \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left( \tan x - \frac{1}{\pi - 2x} \right)$$

$0/0$ ,  $\infty/\infty$  haline dönüştürülür

$$0^0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

Logaritmik limit ile

$$\infty^0$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$$

çözülür

$$1^\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

## L'Hopital Kuralı:

T13

①  $x \rightarrow a$  için  $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$

②  $x \rightarrow a$  için  $f(x) \rightarrow \pm\infty, g(x) \rightarrow \pm\infty$

} ise  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

\*  $x \rightarrow a$  notasyonunda  $a$  sonlu veya sonsuz olabilir.

\*  $x \rightarrow a$  ifadesi  $x \rightarrow 0^+, x \rightarrow a^-$  ifadeleri ile değiştirilebilir.

\*  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

\*  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{1}{1} = 1$

\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{2e^x - 2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{2e^x - 2}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\cos x + 8\cos 2x}{2e^x} = \frac{-2 + 8}{2} = \frac{3}{1} = 3$

\*  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x - x}{x \sin x}}{\frac{\sin x + x \cos x}{2\cos x - x \sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{2\cos x - x \sin x} = 0$

\*  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \left( 1 - \cos \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$



## Logaritmik Limit

T19

$1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$  belirsizliklerini veren limitleri çözmek için kullanılır.

$$(*) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = ? \quad \infty^0 \text{ belirsizliği}$$

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \ln \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \sin x \cdot \ln \left(\frac{1}{x}\right) = -\sin x \cdot \ln x$$

$\ln x^{-1} = -\ln x$

$$\ln y = -\sin x \cdot \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sin x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$$

$\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0 \Rightarrow \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} y \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \frac{1}{1}$$

$$(*) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\cot x} = ? \quad 1^\infty \text{ belirsizliği}$$

$$y = (\cos x)^{\cot x} \Rightarrow \ln y = \cot x \cdot \ln \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x \cdot \ln \cos x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos x}{\frac{1}{\cot x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\sec^2 x}$$

$\frac{0}{0} \rightarrow \text{L'H.}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sin x}{\cos^3 x} \cdot \cos^2 x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0 \Rightarrow \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} y \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \frac{1}{1}$$