LİMİT VE SÜREKLİLİK

Fonksiyonların Limiti: $f(x)$ fonksiyonu, a noktası yakınındaki her x için tanımlı (a'da tanımlı olmayabilir) olsun ve x'i a'ya yeterince yakın olarak (fakat a'ya eşit değil) $f(x)$'in L'ye istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak, x a'ya yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonu L'ye yaklaşır (L limitine yaklaşır) denir. Bunu,

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ şeklinde gösteririz.

⊛ $\lim_{x \to 1} x^2 + 3x + 5 = 9$

NOT: a) $y = f(x)$ fonksiyonu ve bir $x = a$ noktası için:

① $f(x)$, a'yı içeren açık aralıkta tanımlı

② $f(x)$'in grafiği herhangi bir kırılma olmadan $(a, f(a))$ dan geçiyor

$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

b) $f(x)$'in $x = a$ da tanımlı olmadığı bazı durumlarda uygun cebirsel işlemler yapılarak $\lim_{x \to a} f(x)$ limiti hesaplanabilir.

⊛ $$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{(x+2)}(x+3)} = \lim_{x \to -2} \frac{x-1}{x+3} = -3$$

⊛ $$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{\sqrt{x} - 2}}{(x+4)\cancel{(\sqrt{x} - 2)}(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{32}$$

⊛ $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} - 1}{x - 1} \quad (\sqrt{2x^2-1} + 1) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 1 - 1}{(x-1)(\sqrt{2x^2 - 1} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{2\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{2x^2 - 1} + 1)} = 2$$

Limit Kuralları

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ ve $\lim_{x\to a} g(x)=M$ ise

a) $\lim_{x\to a} (f(x) \mp g(x)) = L \mp M$ dir.

b) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ ($M\neq 0$ şartı ile)

c) $\lim_{x\to a} (f(x))^n = L^n$ ($n\in Z^+$) , $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ ($n\in Z^+$ ve n çift ise $L>0$ şartı ile)

d) Limit tektir. (Yani $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ve $\lim_{x\to a} f(x)=M$, $\underline{L=M}$ dir)

e) $f(x)\leq g(x) \Rightarrow L\leq M$ dir.

Kenar Limitler (Sağ Limit, Sol Limit)

Sol Limit: $f(x)$ fonksiyonu, $x=a$ nın solundaki bir (b,a) aralığında tanımlı ve x'i a'nın solundan a'ya yeterince yakın olarak, $f(x)$'in L'ye istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak, $f(x)$ $x=a$ da sol limite sahiptir denir ve $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ ile gösterilir.

Sağ Limit: $f(x)$ fonksiyonu, $x=a$ nın sağındaki bir (a,b) aralığında tanımlı ve x'i a'nın sağından a'ya yeterince yakın olarak, $f(x)$'in L'ye istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak, $f(x)$ $x=a$ da sağ limite sahiptir denir ve $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ ile gösterilir.

NOT: $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(a-h)$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(a+h)$

★ ★

Teorem: Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ da L limitine sahip olması için gerek ve yeter koşul sağ ve sol limitlerin mevcut olması ve her ikisinin de L'ye eşit olmasıdır. Yani;

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L}$$

⊛ $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2+x-6}$ olmak üzere $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ limitlerini bulunuz.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\overset{-1}{\cancel{(2-x)}}}{(x+3)\cancel{(x-2)}} = -\frac{1}{5} \quad \Big\{ \lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \frac{1}{5}$$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$ olduğundan $\lim_{x\to 2} f(x)$ limiti mevcut değildir.

⊛ $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x<0 \\ 1+x & , x\geq 0 \end{cases}$ fonksiyonunun a) $x=0$ da limiti var mı?

b) $x=1$ de limiti var mı?

a) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1+x) = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0 \end{array}\right] \neq \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ mevcut değil.

b) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (1+x) = \underline{\underline{2}}$

⊛ $f(x) = \begin{cases} 2x & , x<1 \\ 3 & , x=1 \\ x^3+1 & , x>1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = ?$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^3+1 = 2 \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \underline{\underline{2}}$

Sandviç (Sıkıştırma) Teoremi:

a'yı kapsayan açık bir aralıktaki tüm x'ler için (x=a hariç olabilir), $f(x) \le g(x) \le h(x)$ olsun. Ayrıca

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ olsun. Bu durumda $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ dir.

* Bu kural sağ ve sol limitler için de geçerlidir.

(*) Her $x \neq 0$ için $1-\dfrac{x^2}{4} \le u(x) \le 1+\dfrac{x^2}{2}$ ise $\lim\limits_{x\to 0} u(x)$'i bulunuz.

1-Sinx

1-Sinx

$\lim\limits_{x\to 0} 1-\dfrac{x^2}{4} = \lim\limits_{x\to 0} 1+\dfrac{x^2}{2} = 1$ olduğundan Sandviç Teo. göre

$\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 1$ dir.

(*) $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 0$ ise $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ olduğunu Gösteriniz.

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

$$\lim_{x\to a} -|f(x)| = \lim_{x\to 0} |f(x)| = 0$$

sıkıştırma Teo. göre $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ dır.

Sonsuzda Limitler

$+\infty$'da Limit: f(x) fonksiyonu bir (a,∞) aralığında tanımlı olsun. x'i yeterince büyük alarak f(x) in L'ye istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabilirsek x sonsuza yaklaşırken f(x) fonksiyonu L limitine yaklaşır denir ve bunu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ ile gösteririz.

$-\infty$'da Limit: $f(x)$ fonksiyonu bir $(-\infty, b)$ aralığında tanımlı olsun. x'i negatif ve mutlak değer olarak da yeterince büyük olarak $f(x)$'in L'ye istediğimiz kadar yakın olmasını sağlayabiliyorsak, x $-\infty$'a yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonu L limitine yaklaşır denir ve bu $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ ile gösterilir.

☆ NOT ☆

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

b) $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to \mp\infty} \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdots \frac{1}{x}}_{n \text{ defa}} = 0 \cdots 0 = 0$

$(n \in \mathbb{N})$

(*) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ olmak üzere $\lim_{x \to \infty} f(x)$ ve $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ limitlerini hesaplayın.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}}{\underbrace{|x|}_{\cancel{x}} \cdot \sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}}{\underbrace{|x|}_{-\cancel{x}\ \to\ -1} \cdot \sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}} = -1$$

(*) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+x} - x = ?$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{(\underbrace{|x|}_{x} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}} + x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}\ 1}{\cancel{x}(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}} + 1)} = \frac{1}{2}$$

Rasyonel fonksiyonlar ve Polinomlar İçin Sonsuzda Limitler

a) Bir polinomdaki en büyük dereceli terim, polinomun $+\infty$ ve $-\infty$ daki limitini belirler. Yani en büyük dereceli terimin $+\infty$ ve $-\infty$ daki limiti tüm polinomun limitini verir.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = x^n\left[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right]$$

$$\lim_{x\to\mp\infty} P(x) = \lim_{x\to\mp\infty} a_n x^n$$

b)

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & , n<m \text{ ise} \\ \dfrac{a_n}{b_m} & , n=m \text{ ise} \\ +\infty \text{ veya } -\infty & , n>m \text{ ise} \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{l} d(P(x)) = n \\ d(Q(x)) = m \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{l} P(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \\ Q(x) = b_m x^m + \dots + b_0 \end{array}\right)$

---

* $\lim_{x\to\infty}(3x^3 - x^2 + 2) = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to\infty}(x^4 - 3x^3 - x^2 + 2) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(3x^3 - x^2 + 2) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to-\infty}(x^4 - 3x^3 - x^2 + 2) = +\infty$

---

* $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 - 5x} = \dfrac{5}{3}$

* $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2 - 3}{x^4 + 5x - 5} = 0$

---

* $$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3 + 3x^2 - 2x}{x^2 + 4x + 5} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^3}^{\,x}\left(5 + \overbrace{\frac{3}{x}}^{0} - \overbrace{\frac{2}{x^2}}^{0}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \underbrace{\frac{4}{x}}_{0} + \underbrace{\frac{5}{x^2}}_{0}\right)} = -\infty$$

Sonsuz Limitler

Bazen, değerleri keyfi olarak büyüyen fonksiyonlara bir sonsuz limite sahiptir denir. Fakat, sonsuz bir sayı olmadığından, sonsuz limitler gerçekte limit değillerdir. Fakat bu limitler, keyfi olarak büyüyen fonksiyonların davranışını belirlemek için kullanılabilirler.

(*) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ nin $x=0$ daki davranışını belirleyiniz.

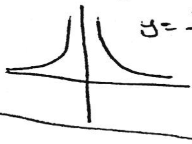
x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$0,001$	$0,01$	$0,1$
$1/x^2$	100	10000	1000000	1000000	10000	100

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

x 0'a (her iki taraftan) yaklaşırken $f(x)$ in değeri pozitiftir ve giderek büyür, $+\infty$'a yaklaşır.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\underline{\underline{+\infty}}$ dur.



$y=\dfrac{1}{x^2}$

(*) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ in $x=0$ daki davranışını inceleyiniz.

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$0,001$	$0,01$	$0,1$
$1/x$	-10	-100	-1000	1000	100	10

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ } x, 0'a sağdan yaklaşırken $f(x)$ değerleri pozitif olarak giderek büyür; $+\infty$'a yaklaşır.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ } x, 0'a soldan yaklaşırken, $f(x)$ in değerleri negatiftir ve mutlak değerce giderek büyür, $-\infty$'a yaklaşır.

Sonuç olarak $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ dir. $f(x)$'in $x=0$ da limiti mevcut değildir.

(*) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4}$ fonksiyonunun $x=2$ deki davranışı?

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\overset{-}{x-3}}{\underset{+}{(x-2)}\underset{+}{(x+2)}}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\overset{-}{x-3}}{\underset{-}{(x-2)}\underset{+}{(x+2)}}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ mevcut değil.

$\neq$

Limitin Formal Tanımı:

Her $\varepsilon>0$ sayısı için $0<|x-a|<\delta$ iken $|f(x)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa, x a'ya yaklaşırken $f(x)$ de L limitine yaklaşır denir ve $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ile gösterilir.

* Limitin bu formal tanımı bize bir fonksiyonun limitinin nasıl bulunacağını söylemez. Şüphelendiğimiz limit değerinin doğruluğunu kanıtlar.

---

* $\lim_{x\to 1}(2x+1)=3$ olduğunu gösteriniz.

Her $\varepsilon>0$ sayısı için $|x-1|<\delta$ iken $|(2x+1)-3|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı var mı?

$|x-1|<\delta$ ✓

$|2x+1-3|=|2x-2|=2|x-1|<2\delta=\varepsilon \Rightarrow \delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$ ✓

---

* $\lim_{x\to 2}(x^2-2x-1)=-1$ olduğunu gösteriniz.

Her $\varepsilon>0$ için $|x-2|<\delta$ iken $|x^2-2x-1+1|<\varepsilon$ o.ş. bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı var mı? $|x-2|<\delta \Rightarrow -\delta<x-2<\delta$

$2-\delta<x<2+\delta$

$$|x^2-2x-1+1|=|x^2-2x|=|x|.|x-2|$$

$$<(2+\delta).\delta=\delta^2+2\delta=\varepsilon$$

$$\delta^2+2\delta-\varepsilon=0 \Rightarrow \delta_{1,2}=\frac{-2\mp\sqrt{4+4\varepsilon}}{2}$$

$$\underset{\times}{\delta_1=\frac{-2-\sqrt{4+4\varepsilon}}{2}<0} \qquad \boxed{\delta_2=\frac{-2+\sqrt{4+4\varepsilon}}{2}>0} ✓$$

$\frac{\sin\theta}{\theta}$ 'yı içeren Limitler

* $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ * $\lim\limits_{\theta\to \infty} \frac{\sin\theta}{\theta} = 0$ * $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\sin\theta} = 1$

---

* $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = ?$ $\cos h = 1 - 2\sin^2\frac{h}{2}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - 2\sin^2\frac{h}{2} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}.2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{2}{2} \cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1} \cdot \underbrace{\sin\frac{h}{2}}_{0} = \underline{\underline{0}}$$

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0}$$

---

* $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\tan t . \sec 2t}{3t} = ?$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos 2t}}{3t} = \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1} \cdot \frac{1}{3\underbrace{\cos t . \cos 2t}_{1}} = \frac{1}{3}$$

---

* $$\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \underbrace{\frac{\sin\theta}{\theta}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos\theta}}_{1} = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1}$$

(*) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{2-\cos x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2+\cos x}{\sin x.(1+\sqrt{2-\cos x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{2-\cos x}}}_{\frac{1}{2}} = 0$$

(*) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 + x\sin 3x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x^2}{x^2} + \frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1+3}{1} = 4$$

SÜREKLİLİK

İç Nokta - Uç Nokta: Karşılaşacağımız fonksiyonların çoğunun tanım kümesi aralık veya ayrık aralıkların birleşimi olacaktır. P noktası böyle bir fonksiyonun tanım kümesine ait olmak üzere, eğer P noktası tanım kümesi içinde kalan açık bir aralık içinde ise bu P noktasına kümenin iç noktası denir. Eğer P iç nokta değilse P'ye uç nokta denir.

* Örneğin, $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ fonksiyonunun tanım kümesi $[-2,2]$ kapalı aralığıdır. Bu aralık, $(-2,2)$ aralığındaki iç noktalar, sol uç noktası -2 ve sağ uç noktası 2'den oluşur.

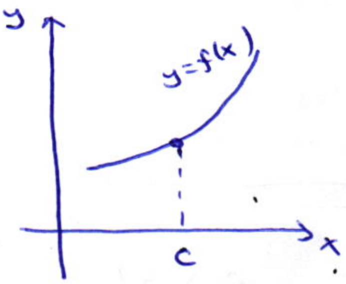
* $(-1,1)$ aralığı sadece iç noktalardan oluşan bir aralıktır. Uç noktası yoktur.

Bir İç Noktada Süreklilik:

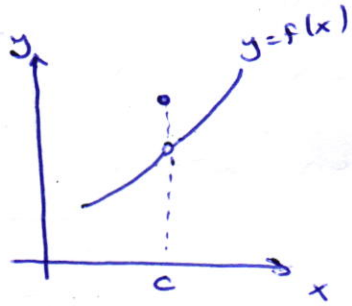
c noktası f(x) fonksiyonunun tanım kümesinin bir iç noktası olmak üzere eğer $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ ise f(x) fonksiyonu c iç noktasında süreklidir denir.

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c) \rightarrow \begin{cases} f(x)\ ,\ x=c \text{ de tanımlı} \\ \lim_{x\to c} f(x) \text{ limiti mevcut} \\ \lim_{x\to c} f(x)=f(c). \end{cases}$$

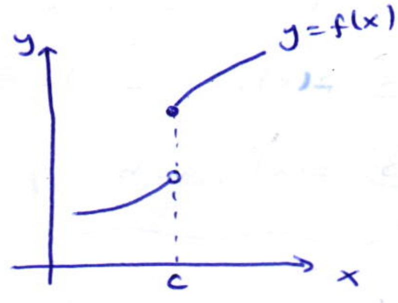
* Eğer $\lim_{x\to c} f(x)$ limiti mevcut olmaz veya mevcut olur ama f(c) ye eşit olmazsa bu durumda f fonksiyonu x=c de süreksizdir denir. Grafik olarak bu, eğer f(x) bir c noktasında sürekli ise onun grafiğinin (c, f(c)) noktasında kırık olmadığı anlamına gelir.



f(x), c'de sürekli



f(x), c'de süreksiz.
Çünkü $\lim_{x\to c} f(x)\neq f(c)$.



f(x), c'de süreksiz.
Çünkü $\lim_{x\to c} f(x)$ limiti mevcut değil.

Sağ- Sol Süreklilik: Bir f(x) fonksiyonu ve x=c noktası için;

* $\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$ ise f(x), c'de sağdan süreklidir denir.

* $\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)$ ise f(x), c'de soldan süreklidir denir.

* Bir $f(x)$ fonksiyonunun c noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul c'de hem sağdan hem de soldan sürekli olmasıdır.

---

* $$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \text{ ise} \\ 0, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x=0$ daki sağdan / soldan sürekliliğini araştırınız. Fonk. $x=0$ da sürekli midir?

$\lim\limits_{x \to 0^+} H(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 = f(0)$ ✓ → Fonk. $x=0$ da sağdan sürekli

$\lim\limits_{x \to 0^-} H(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0 \neq f(0)$ → fonk. $x=0$ da soldan sürekli değil.

Dolayısıyla $H(x)$, $x=0$ da sürekli değildir.

Kapalı Aralıkta Süreklilik: $f(x)$ fonksiyonu bir $[a,b]$ aralığında tanımlı olsun. $f(x)$ in bu aralıkta sürekli olması için:

① $f(x)$, (a,b) de sürekli
② $f(x)$, $x=a$ da sağdan sürekli
③ $f(x)$, $x=b$ de soldan sürekli

olmalıdır.

---

* $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ fonksiyonu $[-2,2]$ de sürekli midir?

① $c \in (-2,2)$ olsun. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-c^2} = f(c)$ olduğundan $f(x)$, $(-2,2)$ de süreklidir. ✓

② $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0 = f(2)$ ⇒ sağ uçta soldan sürekli ✓

③ $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \sqrt{4-x^2} = 0 = f(2)$ ⇒ sol uçta sağdan sürekli ✓

Sonuç olarak $f(x)$ $[-2,2]$ de süreklidir.

L13

<u>Sürekli Fonksiyon</u>: Tanım kümesindeki her noktada sürekli olan fonksiyona "sürekli fonk." denir.

* Tüm polinomlar, tüm rasyonel fonksiyonlar, Sinx, Cosx, Tanx, Cotx,... şeklindeki trigonometrik fonksiyonlar, mutlak değer fonksiyonu tanımlı oldukları her yerde sürekli fonksiyonlardır.

<u>Sürekli Fonksiyonların Özellikleri</u>

a) $f(x)$ ve $g(x)$, $x=c$ de sürekli ise:

$$\left.\begin{array}{ll} ① & f(x) \mp g(x) \\ ② & f(x)/g(x) \quad (g(c) \neq 0) \\ ③ & (f(x))^n \quad (n \in Z^+) \\ ④ & \sqrt[n]{f(x)} \quad (n \in Z^+ \text{ ; } n \text{ çift ise } f(x) \geq 0) \end{array}\right\} \text{fonksiyonları da } x=c \text{ de süreklidir.}$$

b) $f(x)$, $x=c$ de sürekli ve g fonksiyonu da $f(c)$ de sürekli ise o zaman $g \circ f$ fonksiyonu da c'de süreklidir.

c) Eğer g, bir b noktasında sürekli ve $\lim\limits_{x \to c} f(x) = b$ ise

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(b) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right)$$

<u>Süreksizlik Çeşitleri</u>:

① <u>Sıçramalı Süreksizlik</u>: Bir fonksiyonun bir noktada hem sağdan hem de soldan limitleri mevcut ancak eşit değilse bu türden süreksizliğe sıçramalı süreksizlik denir.

② **Sonsuz Süreksizlik:** Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti $+\infty$ veya $-\infty$ ise bu türden süreksizliğe sonsuz süreksizlik denir.

③ **Esas Süreksizlik:** Bir f fonksiyonunun $x=a$ da limiti mevcut değilse böyle süreksizliğe esas süreksizlik denir.

④ **Kaldırılabilir Süreksizlik:** Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir $x=a$ değeri için limiti mevcut fakat fonksiyon değerine eşit değilse ; yani $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ ise veya $f(a)$ tanımlanmamış ise $f(x)$, $x=a$ da kaldırılabilir süreksizliğe sahiptir denir. Bu durumda, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ olmak üzere

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ eğer } x \neq a \\ L & , \ x = a \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlanırsa $F(x)$'e f'in $x=a$ ya sürekli genişlemesi denir. Bu tanımlama ile $f(x)$ in $x=a$ daki süreksizliği kaldırılmış olur.

(*) $f(x) = \begin{cases} 2+x & , x \geq 0 \\ x & , x < 0 \end{cases}$ $x=0$ daki sürekliliği?

$\lim\limits_{x\to 0^+} (2+x) = 2$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$

$\neq \Rightarrow x=0$ da sıçramalı süreksizlik var.

(*) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ nin $x=0$ daki süreksizlik çeşidi?

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \Rightarrow x=0$ da sonsuz süreksizlik var

(*) $f(x) = \sin\frac{1}{x^2}$ $x=0$ daki süreksizlik çeşidi?

$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x^2}$ limiti mevcut değildir. $x=0$ da esas süreksizlik var

---

(*) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & , x \neq 0 \\ 2 & , x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$ da sürekli midir? Süreksiz ise süreksizlik kaldırılabilir mi? Nasıl?

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}\cdot 4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\cdot \overbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}^{1} \cdot \overbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}^{1} = \frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} \neq 2 = f(0)$ → Kaldırılabilir süreksizlik var.

$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & , x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , x = 0 \end{cases}$ olarak tanımlanırsa süreksizlik kalkar.

(*) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ $(x \neq 2)$ fonksiyonunun $x=2$ de sürekli bir genişlemeye sahip olduğunu gösterip bu genişlemeyi bulunuz.

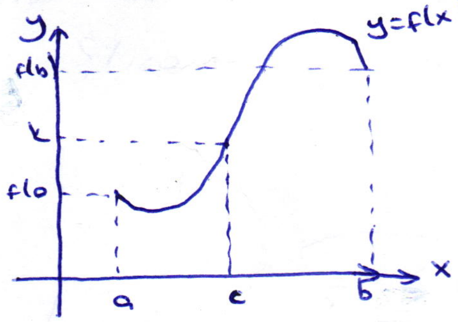
$f(2)$ tanımlı olmamasına rağmen

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \frac{5}{4}$$ dür.

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} & , x \neq 2 \\ \frac{5}{4} & , x = 2 \end{cases}$ veya $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ olarak tanımlanan $f(x)$, $f(x)$ in $x=2$ deki sürekli genişlemesidir.

Ara Değer Teoremi:

f(x), kapalı ve sınırlı bir [a,b] aralığında sürekli olsun. Eğer k, f(a) ile f(b) arasında bulunan herhangi bir sayı ise, a ile b arasında f(c)=k olacak şekilde en az bir c sayısı vardır.



(*) $x^3-x-1=0$ denkleminin 1 ve 2 arasında bir kökünün olduğunu gösteriniz.

$f(x)=x^3-x-1$ olsun.

$f(1)=-1$
$f(2)=5$

$f(1)=-1<0<5=f(2)$ olduğundan Ara Değer Teoremine göre $1<c<2$ olmak üzere $f(c)=0$ olacak şekilde en az bir c sayısı vardır. $c=1.32$ dir.