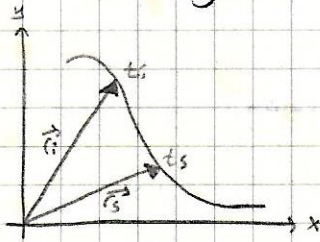


İki Boyutlu Hareket

Yer değiştirme, hız ve ivme vektörleri



yer vektörü = $\vec{r}$ = konum vektörü $\rightarrow$ orijinden
 $\vec{r}_i$ = ilk konum vektörü
 $\vec{r}_s$ = son konum vektörü

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_s - \vec{r}_i \quad \vec{r}_s = \vec{r}_i + \Delta \vec{r}$$

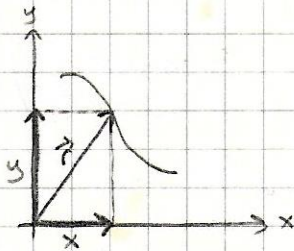
$\rightarrow$ yer değiştirme vektörü

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (\text{m/s}) \quad \text{ortalama hız vektörü}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{m/s}) \quad \text{ani hız vektörü}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_s - \vec{v}_i}{t_s - t_i} \quad \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (\text{m/s}^2) \quad \text{ortalama ivme vektörü}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{m/s}^2) \quad \text{ani ivme vektörü}$$



hız $\vec{v} = \frac{d}{dt} (x\hat{i} + y\hat{j})$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ivme $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (v_x \hat{i} + v_y \hat{j})$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

a_x ve a_y sabit olsun

her bir eksen sabit ivmeli bir boyutlu hareket olarak göz önüne alınabilir.

$$v_{xs} = v_{xi} + a_x t$$

$$v_{ys} = v_{yi} + a_y t$$

$$\vec{v}_s = v_{xs} \hat{i} + v_{ys} \hat{j}$$

$$\vec{v}_s = (v_{xi} + a_x t) \hat{i} + (v_{yi} + a_y t) \hat{j}$$

$$\vec{v}_s = \underbrace{v_{xi} \hat{i} + v_{yi} \hat{j}}_{\vec{v}_i} + \underbrace{a_x t \hat{i} + a_y t \hat{j}}_{\vec{a}t}$$

$$x_s = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y_s = y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

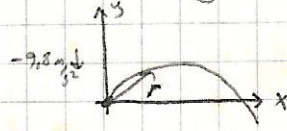
$$\vec{r}_s = x_s \hat{i} + y_s \hat{j}$$

$$\vec{r}_s = (x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2) \hat{i} + (y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2) \hat{j}$$

$$= \underbrace{x_i \hat{i} + y_i \hat{j}}_{\vec{r}_i} + \underbrace{(v_{xi} \hat{i} + v_{yi} \hat{j}) t}_{\vec{v}_i t} + \underbrace{\frac{1}{2} (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) t^2}_{\frac{1}{2} \vec{a} t^2}$$

$$\vec{r}_s = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

Örnek 2 Bir golf topuna bir vuruşun kenarında bir kum tepesinden dışarı vurulmaktadır. x ve y koordinatlarının değişimi $x = 18t$ (m) $y = 4t - 4,9t^2$ (m) t 'nin saniye cinsinden zaman



a) $\vec{r} = ?$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\vec{r} = (18t)\hat{i} + (4t - 4,9t^2)\hat{j}$$

b) $\vec{v} = ?$ $\vec{a} = ?$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 18\hat{i} + (4 - 9,8t)\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -9,8\hat{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

c) $t = 3$ s topun $\vec{r}$, $\vec{v}$ ve $\vec{a} = ?$

$$\vec{r} = (18 \cdot 3)\hat{i} + [4 \cdot 3 - 4,9(3^2)]\hat{j} = 54\hat{i} - 2,7\hat{j} \text{ (m)}$$

$$\vec{v} = 18\hat{i} + [4 - (9,8 \cdot 3)]\hat{j} = 18\hat{i} - 25,4\hat{j} \text{ (m/s)}$$

$$\vec{a} = -9,8\hat{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

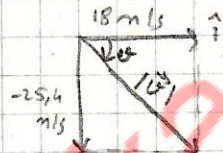
d) $t = 3$ s'de hızının büyüklüğü ve yönü bulunuz.

$$\vec{v} = 18\hat{i} - 25,4\hat{j} \text{ (m/s)}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(18)^2 + (-25,4)^2}$$

$$= 31,3 \text{ m/s}$$



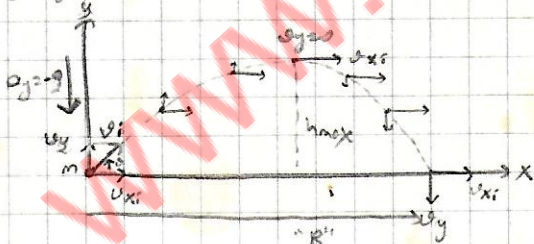
$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{-25,4}{18} \right) = -54,7^\circ$$

Eğik Atış Hareketi

① Hava direnci ihmal

② g yerçekimi ivmesi hareket süresince sabit.



x_i $t=0$ anında

$$x_i = 0$$

$$v_{xi} = v_i \cos \theta$$

$$a_x = 0$$

$$t=0, a_x=0$$

y_i $t=0$

$$y_i = 0$$

$$v_{yi} = v_i \sin \theta$$

$$a_y = -g$$

① y-süresi denklemi: $y = f(x)$

$$x_s = v_{xi} \cos \theta t \Rightarrow t = \frac{x_s}{v_{xi} \cos \theta}$$

$$y_s = v_{yi} \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_s = v_{yi} \sin \theta \left(\frac{x_s}{v_{xi} \cos \theta} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_s}{v_{xi} \cos \theta} \right)^2$$

$$y_s = (\tan \theta) x_s - \left(\frac{g}{2 v_{xi}^2 \cos^2 \theta} \right) x_s^2$$

$$y = ax - bx^2 \rightarrow \text{parabol denklemi}$$

$$v_{xs} = v_{xi} + a_x t = v_{xi} = v_i \cos \theta$$

$$x_s = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \Rightarrow x_s = v_{xi} t$$

$$x_s = v_i \cos \theta t$$

$$t = t, a_y = -g$$

$$v_{ys} = v_{yi} + a_y t = v_i \sin \theta + (-g) t$$

$$y_s = y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$y_s = (v_i \sin \theta \cdot t) + \frac{1}{2} (-g) \cdot t^2$$

$$= v_i \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

★ ② cismin çıkacağı max. yükseklik nedir? B. yüksekliğe çıkması için geçen süreyle buluruz.

$$h_{\max} \rightarrow v_{ys} = 0 \text{ olmalı}$$

$$v_{ys} = v_i \sin \theta - gt \Rightarrow 0 = v_i \sin \theta - gt \quad t = \frac{v_i \sin \theta}{g}$$

→ max yüksekliğe çıkış süresi

$$y_s = v_i \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y_s = h_{\max} = v_i \sin \theta \left(\frac{v_i \sin \theta}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_i \sin \theta}{g} \right)^2$$

$$h_{\max} = \frac{1}{2} v_i^2 \sin^2 \theta \rightarrow \text{çıkabileceği max. yükseklik.}$$

★ Yatağ ekseninde cismin ulaşabileceği en uzak nokta 2 menzil? → R=?

$$t=0 \rightarrow y_i = 0 \\ t=t_{\max} \rightarrow y_s = 0$$

$$③ y_s = y_i + v_{yi} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = v_{yi} t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow 0 = (v_i \sin \theta) - \frac{1}{2} g t_{\max}$$

$$t_{\max} = \frac{2 v_i \sin \theta}{g} \quad \text{1} \quad \rightarrow t_{\max} = 2 t_{\max} \quad \text{1}$$

$$② v_{ys} = v_{yi} - gt$$

$$-v_{yi} = v_{yi} - gt \rightarrow gt = 2 v_{yi} \rightarrow t = \frac{2 v_i \sin \theta}{g} = t_{\max} \quad \text{1}$$

① veya ②

$$③ x_s = v_i \cos \theta t$$

$$x_s = v_i \cos \theta \left(\frac{2 v_i \sin \theta}{g} \right) \rightarrow x_s = R = \frac{2 v_i^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$$

$$\boxed{R = \frac{v_i^2}{g} \sin 2\theta} \rightarrow \text{menzil}$$

★ v_i sabit ise

$\theta \rightarrow$ değeri artarsa ise R=?

$\theta \rightarrow$ değeri azalsın ise R değeri azalır.

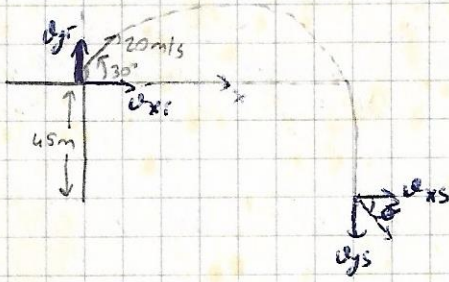
$$R = \frac{v_i^2}{g} \sin(2\theta) \quad \Rightarrow \quad \sin(2\theta) = 1 \\ \text{1} \quad \text{y}_{\text{sabit}} \quad 2\theta = 90^\circ \\ (\theta = 45^\circ)$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 90 \Rightarrow \sin(2\theta_1) = \sin(2\theta_2)$$

$$R = \frac{v_i^2}{g} \sin(2\theta_1) = \frac{v_i^2}{g} \sin(2\theta_2)$$

v_i sabit olduğu için θ_1 ve θ_2 farklı açıların menzilleri aynıdır.

Örnek: Bir taş aşağıdaki gibi 30° lik bir açı ve 20 m/s 'lik ilk hızla atılıyor.
Binanın yüksekliği 45 m ise;



a) Taş ne kadar sürede havada kalır?

$$v_{x1} = v_i \cos \theta = 20 \cdot \cos 30 = 17,3 \text{ m/s}$$

$$v_{y1} = v_i \sin \theta = 20 \cdot \sin 30 = 10 \text{ m/s}$$

$$y_s = y_i + v_{y1}t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$-45 = 0 + (10 \sin 30)t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$-45 = 10t - \frac{1}{2} (9,8)t^2$$

$$\text{Pozitif kök} \rightarrow t = 4,225$$

b) Zeminle çarpmadan hemen önce taşın hızının büyüklüğünü bulunuz.

$$v_{xs} = v_{xi} = 17,3 \text{ m/s}$$

$$v_{ys} = v_{yi} - g t$$

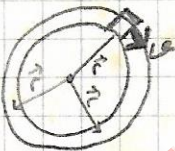
$$v_{ys} = (10 \text{ m/s}) - (9,8)(4,22) = -31,4 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = v_{xs}\hat{i} + v_{ys}\hat{j} = 17,3\hat{i} - 31,4\hat{j}$$

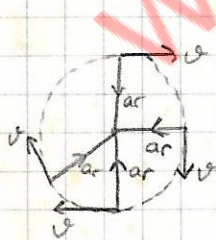
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_{xs}^2 + v_{ys}^2} = \sqrt{(17,3)^2 + (-31,4)^2} = 35,9 \text{ m/s}$$

$$\tan \theta = \frac{v_{ys}}{v_{xs}} = \frac{-31,4}{17,3} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{-31,4}{17,3}\right)$$

Düzenli Dairesel Hareket

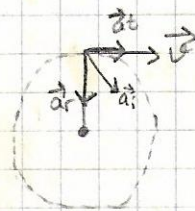
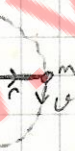


$$|\vec{v}| = \text{sabit}$$



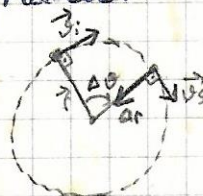
$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

radial ivme



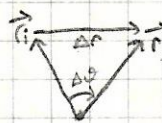
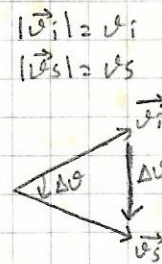
$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$



$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

göreceli ivme



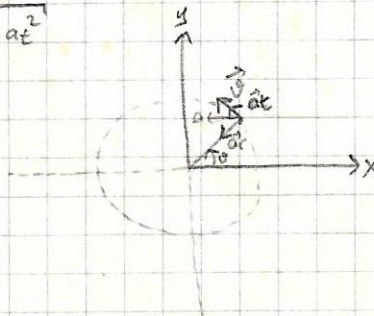
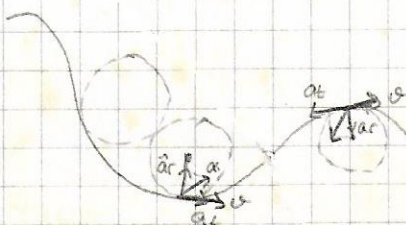
$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}$$

$$\Delta v = \frac{v}{r} \Delta r$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)$$

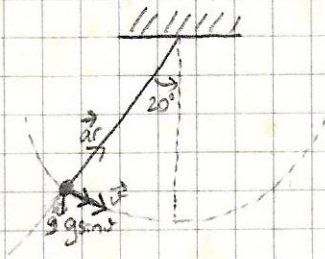
$$a = \frac{v^2}{r} = a_r \rightarrow \text{radial (merkeze) ivme}$$



$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r} (-\hat{r}) + \frac{d|\vec{v}|}{dt} (\hat{\theta})$$

Örnek 0,5 m bir ipin ucuna bağlı bir top sekizdelek gibi hareketinin etkisi altında düşey bir daire çevresinde salınmaktadır. İp, düşey ile $\theta = 20^\circ$ 'lik bir açı yaptığı zaman top 1,5 m/s'lik hızla salıyordur.



a) İvmenin bu anda kaç radyal bileşene sahiptir.

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(1,5)^2}{0,5} = 4,5 \text{ m/s}^2$$

b) $\theta = 20^\circ$ olduğunda $a_t = ?$

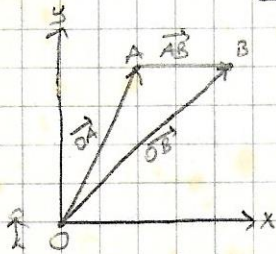
$$a_t = g \sin \theta = 3,4 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_t \hat{\theta}$$

$$= (4,5 \text{ m/s}^2) \hat{r} + (3,4 \text{ m/s}^2) \hat{\theta}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(4,5)^2 + (3,4)^2} = 5,6 \text{ m/s}^2$$

Görelî Hareket



A ve B cisimleri O noktası gözlemci tarafından izlenir.

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$$

$$\frac{d(\vec{OB})}{dt} = \frac{d(\vec{AB})}{dt} + \frac{d(\vec{OA})}{dt}$$

$$\vec{v}_{BO} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{AO}$$

$$\vec{v}_{BA} = -\vec{v}_{AB}$$

$$\vec{v}_{AO} = -\vec{v}_{OA}$$

$$\frac{d(\vec{OB})}{dt} = \vec{v}_{BO} = \text{B'nin orijine (O) 'ya göre hızı}$$

$$\frac{d(\vec{OA})}{dt} = \vec{v}_{AO} = \text{A'nın orijine (O'ya) göre hızı}$$

$$\frac{d(\vec{AB})}{dt} = \vec{v}_{BA} = \text{B'nin A'ya göre hızı}$$

$$\vec{v}_{BO} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{AO} \rightarrow \text{görelî hız toplamı kuralı}$$

Düşük hızlarda geçerli.

$$\vec{v}_{BO} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{AO}$$

Bağıl İvme

$$\vec{v}_{BO} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{AO}$$

$$\frac{d\vec{v}_{BO}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{AO}}{dt}$$



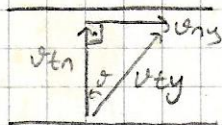
$$\frac{d\vec{v}_{AO}}{dt} = 0$$

$$\text{eğer } \frac{d\vec{v}_{AO}}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{v}_{BO}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt}$$

Ör 2 Kuzeye giden bir tekne karşı bir nehrin suya göre 10 km/s 'lik bir hızla karıdan karaya geçmektedir. Nehirdaki su doğuya doğru yere göre 5 km/s doğan bir hızla sahiptir. Teknenin kütleden birimle duran gözlemciye göre hızını bulunuz.

$$v_{ty} = ?$$

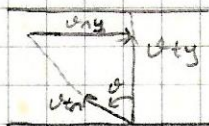
$$\vec{v}_{ty} = \vec{v}_{tn} + \vec{v}_{ny}$$



$$v_{ty} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.2 \text{ km/s}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_{ny}}{v_{tn}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{5}{10} \right) = 26.6^\circ$$

Ör 2 Bir önceki örnekte tekne nehrin suya göre 10 km/s 'lik hızla atılıyor. Şekildeki gibi kuzeye gitmek isterse baş tarafını nereye çevirmelidir?



$$v_{ty} = \sqrt{v_{tn}^2 - v_{ny}^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8.66 \text{ km/s}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_{ny}}{v_{ty}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{5}{8.66} \right) = 30^\circ$$