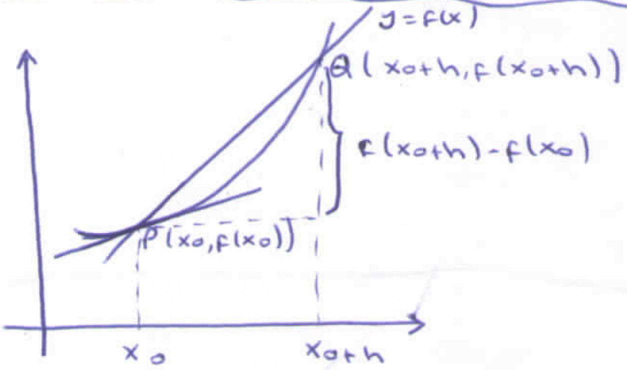
TÜREV

(Ortalama) Değişim Oranları ve Bir Eğrinin Eğimi



$y=f(x)$ fonksiyonunun $[x_0, x_0+h]$ aralığında, x'e göre (ortalama) değişim oranı:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ dır.

f'in $[x_0, x_0+h]$ daki değişim oranı geometrik olarak, P ve Q'dan geçen doğrunun eğimidir. PQ kiriştir.

Eğer Q'yu eğri boyunca P'ye yaklaştırır ve limite geçersek eğrinin P noktasındaki eğimini buluruz.

Eğrinin P deki teğeti bu eğim ile P'den geçen doğrudur.

$$m_T=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Rightarrow \text{Eğrinin P'deki eğimi}$$

<u>Tanım:</u> $f(x)$ fonksiyonunun x_0 daki türevi $f'(x_0)$ ile gösterilir ve limitin var olması koşulu ile

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ olarak tanımlanır. Bu durumda

f fonksiyonunun x_0 da türevlenebilir olduğu söylenir.

Genel olarak; $y=f(x)$ fonksiyonunun türevi, limitin var olması koşulu ile $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ~~ile tanımlanır.~~

fonksiyonudur.

* $y=f(x)$ fonksiyonunun türevinin birçok notasyonu vardır:

$$f'(x)=y'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=D_f$$

* $x=x_0$ daki türev notasyonları:

$$f'(x_0)=y'(x_0)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

---

* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ limiti:

1. $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ noktasındaki grafiğinin eğimi
2. " " " " teğetinin "
3. $f(x)$ in $x=x_0$ noktasında x değişkenine bağlı değişim oranı
4. x_0 daki $f'(x_0)$ türevi

anlamlarına gelir.

---

* $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ ise $f'(x)$'i tanımı kullanarak bulunuz.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+(x+h)^2}-\sqrt{1+x^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+(x+h)^2-(1+x^2)}{h\left(\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+2x)}{\cancel{h}\left(\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}\right)}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

<u>Sağdan - Soldan Türevler</u>:

Bir f fonksiyonunun $x=a$ daki sağdan türevi, eğer limit mevcutsa:

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ olarak tanımlanır.

Bir f fonksiyonunun $x=a$'daki soldan türevi, eğer limit mevcutsa

$$f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ olarak tanımlanır.

✲ f fonksiyonunun $x=a$ da türeve sahip olması için $f'_+(a)=f'_-(a)$ olmalıdır.

✲ $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & x\leq 1 \\ 2x-3, & x>1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=1$ deki türevini hesaplayınız.

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2-2+1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0^-}(h+2)=\underline{\underline{2}}$$

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2(1+h)-3+1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h}{h}=\underline{\underline{2}}$$

$$f'_-(1)=f'_+(1)=2 \Rightarrow f'(1)=2 \checkmark$$

Kapalı Aralıkta Türevlenebilirlik:

✲ $y=f(x)$ fonksiyonu bir açık aralığın her noktasında bir türeve sahipse "açık aralıkta türevlenebilirdir".

✲ Bir $f(x)$ fonksiyonu, (a,b) açık aralığında türevlenebilir ve $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ($x=a$ noktasında sağ türev) ve

$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$ ($x=b$ de sol türev) limitleri mevcutsa

bu fonksiyon $[a,b]$ de türevlenebilirdir.

Türev ve Süreklilik

* Eğer $f(x)$ fonksiyonu, $x=x_0$ da türevlenebilir bir fonksiyon ise $x=x_0$ da süreklidir.

fonk. Türevli $\Rightarrow$ fonk. Sürekli ✓

fonk. Süreksiz $\Rightarrow$ fonk. Türevsiz ✓

(*) $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & x\le 1 \\ 2x-4, & x>1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=1$ deki türevlenebilirliğini araştırın.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$$

$\neq \Rightarrow$ fonk. $x=1$ de süreksiz $\Rightarrow$ $x=1$ de Türevlenemez

---

(*) $f(x)=|x^2-1|$ fonksiyonu $x=1$ de türevlenemez ancak bu noktada süreklidir. Gösteriniz.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-x^2) = 0 = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2-1) = 0 = f(1)$$

fonk. $x=1$ de sürekli ✓

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^2-1-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2+2h}{h} = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1-(1+h)^2-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{h^2+2h}{h} = -2$$

$\neq$ $x=1$ de Türevlenemez

Türev Alma Kuralları

① $f(x)=c$ (c: sabit) ise $f'(x)=0$

② $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n.x^{n-1}$

③ $F(x)=f(x)\mp g(x) \Rightarrow F'(x)=f'(x)\mp g'(x)$

④ $[f(x).g(x)]'=f'(x).g(x)+g'(x).f(x)$

⑤ $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x).g(x)-g'(x).f(x)}{(g(x))^2}$ $(g(x)\neq 0)$

⑥ $f(x)=\operatorname{Sin}x \rightarrow f'(x)=\operatorname{Cos}x$

$f(x)=\operatorname{Cos}x \rightarrow f'(x)=-\operatorname{Sin}x$

$f(x)=\operatorname{Tan}x \rightarrow f'(x)=1+\operatorname{Tan}^2x=\operatorname{Sec}^2x=\dfrac{1}{\operatorname{Cos}^2x}$

$f(x)=\operatorname{Cot}x \rightarrow f'(x)=-(1+\operatorname{Cot}^2x)=-\operatorname{Cosec}^2x=-\dfrac{1}{\operatorname{Sin}^2x}$

$f(x)=\operatorname{Sec}x \rightarrow f'(x)=\operatorname{Sec}x.\operatorname{Tan}x$

$f(x)=\operatorname{Cosec}x \rightarrow f'(x)=-\operatorname{Cosec}x\operatorname{Cot}x$

⑦ Bileşke fonk. Türevi:

$(f\circ g)'(x)=(f(g(x)))'=f'(g(x)).g'(x)$

⊛ $y=\operatorname{Tan}(5-\operatorname{Sin}2t) \Rightarrow y'=?$

$y'=\operatorname{Sec}^2(5-\operatorname{Sin}2t).(-\operatorname{Cos}2t).2$

⊛ $r=\operatorname{Sin}(f(t))$, $f(0)=\frac{\pi}{3}$, $f'(0)=4$

$\left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{t=0}=?$

$\dfrac{dr}{dt}=\operatorname{Cos}(f(t)).f'(t)$

$\left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{t=0}=\overbrace{\operatorname{Cos}(\underbrace{f(0)}_{\pi/3})}^{1/2}.\underbrace{f'(0)}_{4}=\boxed{2}$

⊛ $f'(3)=-1$ $g'(2)=5$ $g(2)=3$ $y=f(g(x)) \Rightarrow$

$y'(2)=?$

$y'=f'(g(x)).g'(x) \rightarrow y'(2)=\underbrace{f'(\overbrace{g(2)}^{3})}_{-1}.\overbrace{g'(2)}^{5}=-5$

Bir Eğrinin Teğet ve Normal Doğrusu

$y=f(x)$ bir eğri ve $P(x_0,y_0)$ eğri üzerinde bir nokta olsun. Bu durumda $x=x_0$ dan geçen teğet doğrunun eğimi $m_T=f'(x_0)$ ve teğet doğrunun denklemi $y-y_0=\underbrace{m_T}_{f'(x_0)}.(x-x_0)$ dır.

Normal doğrunun denklemi ise:

$$y-y_0=-\frac{1}{m_T}(x-x_0) \quad \text{yani} \quad \boxed{y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)} \text{ dır.}$$

$$\left(m_N=-\frac{1}{m_T}\right)$$

(*) $y=\dfrac{1}{(1-2x)^3}$ eğrisine teğet olan her doğrunun eğiminin pozitif olduğunu gösteriniz.

$$y=(1-2x)^{-3} \qquad y'=-3.(1-2x)^{-4}.(-2)=\frac{6}{(1-2x)^4}>0 \quad \left(x\neq\frac{1}{2} \text{ için}\right)$$

Eğri üzerindeki her (x,y) noktasında teğet doğrunun eğimi pozitiftir.

(*) $y=\operatorname{Tan}\dfrac{\pi x}{4}$ eğrisinin $(1,1)$ noktasındaki teğet ve normal doğrularının denklemlerini bulunuz.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=\left(1+\operatorname{Tan}^2\frac{\pi x}{4}\right).\left.\frac{\pi}{4}\right|_{(1,1)}=(1+1).\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow m_T=\frac{\pi}{2} \qquad m_N=-\frac{2}{\pi}$$

Teğet denklemi $\Rightarrow y-1=\frac{\pi}{2}(x-1) \rightarrow y=\frac{\pi}{2}x+1-\frac{\pi}{2}$

Normal denklemi $\Rightarrow y-1=-\frac{2}{\pi}(x-1) \rightarrow y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{2}{\pi}+1$

(*) $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun türevininin $f'(x)=\cos x$ olduğunu gösteriniz.

$$\sin(x+h)=\sin x.\cos h+\cos x\sin h$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}=\lim_{h\to 0}\sin x.\underbrace{\frac{\cos h-1}{h}}_{0}+\lim_{h\to 0}\cos x\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1}$$

$$=\cos x$$

Yüksek Basamaktan Türevler

Eğer $y=f(x)$ fonksiyonunun türevi $f'(x)$ fonksiyonu da türevlenebilir ise bu fonksiyona $f(x)$ in 2. türevi denir ve genel olarak $y''=f''(x)$ ile gösterilir.

$$y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=D^2f(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Genel olarak, bir fonksiyonun n. mertebe türevi:

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}f(x)=D^nf(x)$$ notasyonlarıyla gösterilir. $(n\in Z^+)$

$f^{(0)}(x)=f(x)$ dir.

<u>NOT:</u> x-ekseni boyunca hareket eden bir nesnenin t zamanındaki pozisyonu $x=f(t)$ ise nesnenin o andaki hızı $v(t)=\frac{dx}{dt}=f'(t)$ ve o andaki ivmesi $a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$ dir.

Sürat hızın mutlak değeridir: $\text{Sürat}=|v(t)|=\left|\frac{dx}{dt}\right|$

⊛ $y=\frac{1}{1+x}$ fonksiyonunun n. mertebe türevi için bir formül bulunuz.

$y=(1+x)^{-1}$ $\quad y'=-(1+x)^{-2}$ $\quad y''=2(1+x)^{-3}$ $\quad y'''=-3.2.(1+x)^{-4}$

$y^{(4)}=4.3.2.(1+x)^{-5}$ ---- $\quad y^{(n)}=(-1)^n.n!(1+x)^{-(1+n)}$

⊛ $f(x)=\sin(ax+b)$ ise $f^{(n)}(x)$ için bir formül bulunuz.

$f'(x)=a.\cos(ax+b)$ $\quad f''(x)=-a^2\sin(ax+b)$

$f'''(x)=-a^3\cos(ax+b)$ $\quad f^{(4)}(x)=a^4.\sin(ax+b)$

$f^{(5)}(x)=a^5.\cos(ax+b)$ $\quad f^{(6)}(x)=-a^6\sin(ax+b)$

$\vdots$

$f^{(2k)}(x)=(-1)^k.a^{2k}.\sin(ax+b)$ $\quad f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k.a^{2k+1}.\cos(ax+b)$

Kapalı Fonksiyonun Türevi / Kapalı Türetme Yöntemi

$F(x,y)=0$ şeklindeki bir fonksiyon y'yi x'in bir kapalı fonksiyonu olarak tanımlar. Bu fonksiyonun türevini alırken:

① y fonksiyonunun x'e göre türevi alınabilir bir fonk. olduğu kabul edilerek denklemin x'e göre türevi alınır

② Elde edilen türev denkleminden y' çekilir.

Bu yönteme "kapalı türetme yöntemi" denir.

(*) $y^6 - y - x^3 = 0 \Rightarrow y' = ?$

↓ x'e göre türev

$6 \cdot y^5 \cdot y' - y' - 3x^2 = 0 \Rightarrow y'(6y^5 - 1) = 3x^2 \Rightarrow y' = \dfrac{3x^2}{6y^5 - 1}$

(*) $x^2 y - xy^3 + \sin(x+y) = 0 \Rightarrow y' = ?$

↓ x'e göre türev

$2xy + x^2 y' - y^3 - 3xy^2 y' + (1+y')\cos(x+y) = 0$

↓

$y' = -\dfrac{2xy - y^3 + \cos(x+y)}{x^2 - 3xy^2 + \cos(x+y)}$

(*) $y = \sin(x+y) \Rightarrow y'' = ?$

↓ x'e göre türev

$y' = (1+y')\cos(x+y)$

↓ x'e göre türev

$y'' = (1+y')^2(-\sin(x+y)) + y'' \cdot \cos(x+y)$

$y'' = \dfrac{(1+y')^2 \cdot (-\sin(x+y))}{1 - \cos(x+y)}$

(*) $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ eğrisinin $(2,4)$ noktasındaki teğet ve normal doğrusu?

$x^3 + y^3 - 9xy = 0 \rightarrow 3x^2 + 3y^2 y' - 9y - 9xy' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{9y - 3x^2}{3y^2 - 9x}$

$y'\Big|_{(2,4)} = m_T = \dfrac{4}{5} \Rightarrow m_N = -\dfrac{5}{4}$

Teğet $\Rightarrow y - 4 = \dfrac{4}{5} \cdot (x-2) \Rightarrow y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{12}{5}$

Normal $\Rightarrow y - 4 = -\dfrac{5}{4}(x-2) \Rightarrow y = -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{13}{2}$

Lineerleştirme : Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x=a$ da türevlenebilir ise aşağıdaki yaklaşım fonksiyonu

$$L(x)=f(a)+f'(a).(x-a)$$

f fonksiyonunun a noktasındaki lineerleştirmesi olarak tanımlanır. f in L ile $f(x) \approx L(x)$ yaklaşımına f fonksiyonunun a noktasındaki lineer yaklaşımı denir. $x=a$ bu yaklaşımın merkezidir.

⊛ $f(x)=\sqrt{1+x}$ in $x=0$ daki lineerleştirmesini bulunuz.

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ $\quad f'(0)=\dfrac{1}{2}$ $\quad f(0)=1 \Rightarrow L(x)=1+\dfrac{1}{2}x$

⊛ $(1,001)^5 - 3(1,001)^{3/2}+2$ değerini lineerleştirme kullanarak yaklaşık olarak hesaplayın.

$a=1$ $\quad f(x)=x^5-3x^{3/2}+2$ olsun.

$f'(x)=5x^4-\dfrac{9}{2}x^{1/2}$ $\quad f'(1)=\dfrac{1}{2}$ $\quad f(1)=0$

$L(x)=0+\dfrac{1}{2}(x-1)=\dfrac{1}{2}(x-1) \Rightarrow f(x) \approx L(x)$

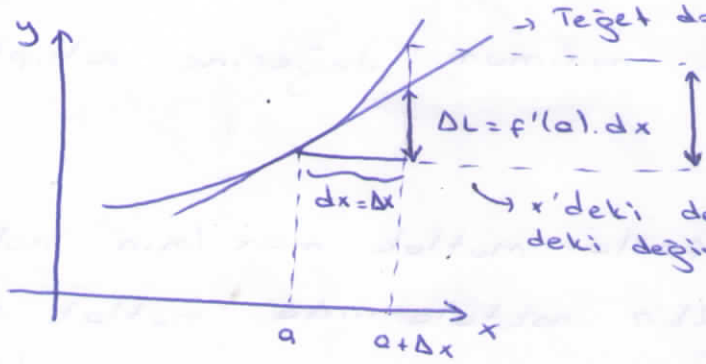
$\Rightarrow f(1,001) \approx L(1,001)=\dfrac{1}{2}(1,001-1)=\underline{0,0005}$

Diferansiyel:

$y=f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. dx diferansiyeli bağımsız bir değişkendir ve dy diferansiyeli:

$dy = f'(x)\,dx$ ile tanımlanır.

* Geometrik olarak; $x=a$ noktasının $dx=\Delta x$ kadar değişmesi durumunda $f(x)$ in lineerleşmesinde meydana gelen ΔL değişimi dy diferansiyelidir.



↳ x'deki değişiklik dx olduğunda, lineerleştirmedeki değişiklik dy olur.

$L(x) = f(a) + f'(a).(x-a)$

$dy = \Delta L = L(a+dx) - L(a) = f(a) + f'(a).(a+dx-a) - f(a) = f'(a).dx$

Gösterim:

$dy = df$

* $d(\cos x) = -\sin x.dx$

$d(\tan 2x) = +2\sec^2 2x\,dx$

* $y = x^5 + 5x^4 - 2x \Rightarrow dy = (5x^4 + 20x^3 - 2)\,dx$

⊛ $(1{,}001)^5 - 3(1{,}001)^{3/2} + 2$ değerini diferansiyel ile yaklaşık olarak hesaplayın. $a=1$ $f(x) = x^5 - 3x^{3/2} + 2$ $f'(x) = 5x^4 - \frac{9}{2}x^{1/2}$ $f'(1) = \frac{1}{2}$ $f(1)=0$

$dy = f'(1).dx$

$dy = f(1{,}001) - \underbrace{f(1)}_{0} = f(1{,}001)$ $dx = \Delta x = 1{,}001 - 1 = 0{,}001$

$dy = f'(1).dx \Rightarrow f(1{,}001) = \frac{1}{2}.0{,}001 = \underline{0{,}0005}$