MAT.1
1. Uygulama

(*) $\lim_{x\to\infty} x^2.\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)=?$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2.\left(1-\cos\frac{2}{x}\right).\left(1+\cos\frac{2}{x}\right)}{1+\cos\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2.\left(1-\cos^2\frac{2}{x}\right)}{1+\cos\frac{2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{1-\cos^2\frac{2}{x}}^{\sin^2\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x^2}}.\frac{1}{1+\cos\frac{2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\right)^2}_{1}.4.\frac{1}{\underbrace{1+\cos\frac{2}{x}}_{2}}=\underline{\underline{2}}$$

(*) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=?$

$2x-\pi=u$ olsun. $x\to\frac{\pi}{2}$ iken $u\to 0$ olur.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{u}{2}\right)}{u}=\lim_{u\to 0}-\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}.2}=-\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\to 1$$

(*) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=?$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x.\cos x}{x^3.\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x.(1-\cos x)}{x^3.\cos x}$$

$(1+\cos x)$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}.\underbrace{\frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\sin^2 x}}{x^2}}_{1}.\frac{1}{\underbrace{\cos x.(1+\cos x)}_{2}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\circledast \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}-\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}}{\operatorname{Tan}x} = ?$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}-\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}\right)\left(\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}+\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}\right)}{\operatorname{Tan}x \cdot \left(\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}+\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}x}{\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}\cdot\left(\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}+\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}x} \cdot \frac{\operatorname{Cos}x}{\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}+\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}} + \overbrace{\frac{\operatorname{Cos}x}{\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}+\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}}}^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1-\operatorname{Cos}x}{x}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{x}{\operatorname{Sin}x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{Cos}x}{\sqrt{2+\operatorname{Sin}x}+\sqrt{1+\operatorname{Cos}x}}}_{\frac{1}{2\sqrt{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}}$$

$$\circledast \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}|x| \cdot \operatorname{Tan}x} = ?$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}x \cdot \underbrace{\operatorname{Tan}x}_{\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\cancel{\operatorname{Cos}x}) \cdot \operatorname{Cos}x}{\underbrace{\operatorname{Sin}^2x}_{\underbrace{1-\operatorname{Cos}^2x}_{(1-\cancel{\operatorname{Cos}x})(1+\operatorname{Cos}x)}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Cos}x}{1+\operatorname{Cos}x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\operatorname{Cos}x}{-\operatorname{Sin}x \cdot \operatorname{Tan}x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{(1-\cancel{\operatorname{Cos}x}) \cdot \operatorname{Cos}x}{\underbrace{\operatorname{Sin}^2x}_{\underbrace{1-\operatorname{Cos}^2x}_{(1-\cancel{\operatorname{Cos}x})(1+\operatorname{Cos}x)}}} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\operatorname{Cos}x}{1+\operatorname{Cos}x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}|x| \cdot \operatorname{Tan}x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}|x| \cdot \operatorname{Tan}x} \Rightarrow \text{limit mevcut değil}$$

2015 - 1. vize sorusu:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} x & , x \le -2 \\ \dfrac{1}{x+2} & , -2 < x \le 1 \\ \dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$

şeklinde tanımlanıyor.

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = ?$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = ?$

b) $x = -2$ ve $x = 1$ deki süreksizlik tipleri?

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} x = -2$ → $\nexists$ limit mevcut değil. → $x = -2$ de sonsuzlesas süreksizlik var

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{-(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = -\dfrac{1}{2}$

1

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{3}$ → $\nexists$ limit yok → $x = 1$ 'de sıçramalı süreksiz

2016 - 1. vize sorusu

(*) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 2x}{x^2 - \pi x} = ?$

$x - \pi = t$ olsun. $x \to \pi$ ise $t \to 0$ olur.

$\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 2x}{x(x-\pi)} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin(2\pi + 2t)}{(\pi + t).t} = \lim\limits_{t \to 0} \underbrace{\dfrac{\sin 2t}{2t}}_{1} \cdot \dfrac{2}{\pi + t} = \dfrac{2}{\pi}$

2016-1. vize sorusu

$f(x)=\dfrac{3.|x-2|}{x^2.(4-x^2)}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları ve süreksizlik tiplerini inceleyiniz.

$x^2.(4-x^2)=0 \rightarrow x=0$, $x=2$, $x=-2$ de süreksiz.

$x=0$ için

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3.(2-\cancel{x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3.(2-\cancel{x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}=+\infty \Rightarrow$$

$x=0$ da sonsuz (esas) süreksiz

$x=-2$ için

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}=+\infty \qquad \lim_{x\to -2^-}\frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}=-\infty$$

$\Downarrow$

$x=-2$ de sonsuz(esas) süreksiz

$x=2$ için

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3.(\cancel{x-2})^{-1}}{x^2(\cancel{2-x})(2+x)}=-\frac{3}{16} \qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}=+\frac{3}{16}$$

$\neq$ $x=2$ de sıçramalı süreksiz

⊛ 2016 - Bütünleme sorusu;

$f_{\alpha,\beta}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(\alpha\geq 0,\ \beta\in\mathbb{R})$ fonksiyonu

$$f_{\alpha,\beta}=\begin{cases} x^{\alpha}.\sin x^{\beta} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0\end{cases}$$

olsun. Buna göre $f_{0,-1}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$'de sürekli mi?

$f_{0,-1} \Rightarrow \alpha=0 \quad \beta=-1$

$$f_{0,-1}=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ limiti mevcut olmadığından $f_{0,-1}$ $\mathbb{R}$'de sürekli değildir.

2016 - yaz okulu 1. vize soruları;

⊛

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{x}} = ?$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(1-\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{x^2}}_{\to 0}}\right)}{\cancel{x}\left(1-\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{x}}}_{0}\right)} = \boxed{0}$$

⊛ $f(x)=\dfrac{x^2}{1-\cos x}$ ile verilen $f(x)$ fonksiyonunun $x=0$ daki süreksizlik tipini belirleyiniz ve sürekli olması için gerekeni yapınız.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\underset{(1+\cos x)}{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2}_{1} \cdot \underbrace{(1+\cos x)}_{2}$$

$$= \boxed{2}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{1-\cos x}, & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$$

olarak tanımlarsak fonk. $x=0$ da sürekli olur.

2016 - Mazeret sınavı sorusu:

$f(x) = \dfrac{2.|x-1|}{x^2 - x^3}$ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz.

Eğer varsa süreksizlik noktalarını sınıflandırın.

$x^2 . (1-x) = 0 \Rightarrow x=0 \quad x=1$ de süreksiz.

x = 0 için

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2.(1-\cancel{x})}{x^2.(1-\cancel{x})} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2.(1-\cancel{x})}{x^2.(1-\cancel{x})} = +\infty \rightarrow x=0$ da

sonsuz (esas) süreksiz

x = 1 için

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2.(1-\cancel{x})}{x^2 (1-\cancel{x})} = 2 \qquad \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2.\overset{-1}{(x-\cancel{1})}}{x^2.(1-\cancel{x})} = -2$

$\neq \Rightarrow x=1$ de sıçramalı süreksiz

(*) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{2x - \pi} = ?$

$2x - \pi = u$ olsun. $x \to \frac{\pi}{2}$ ise $u \to 0$ olur.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{2x - \pi} = \lim_{u \to 0} \frac{\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{u}{2}\right)}^{\cos\frac{u}{2}} - 1}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{\cos\frac{u}{2} - 1}{\underbrace{\frac{u}{2} \cdot 2}_{0}} \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

(*) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - \sin 2x}}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - \sin 2x})(1 + \sqrt{1 - \sin 2x})}{\tan x \cdot (1 + \sqrt{1 - \sin 2x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + \sin 2x}{\tan x \cdot (1 + \sqrt{1 - \sin 2x})} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \cancel{\sin x} \cdot \overbrace{\cos x}^{1}}{\frac{\cancel{\sin x}}{\underbrace{\cos x}_{1}} \cdot (1 + \underbrace{\sqrt{1 - \sin 2x}}_{1})}$$

$$= \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

(*) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot \cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ limitini sıkıştırma teoremini kullanarak bulunuz.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \cos x \le 1$ dir. O halde,

$x \neq 0$ için $-1 \le \cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \le 1$ dir.

$$\Downarrow$$

$$-x^2 \le x^2 \cdot \cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \le x^2 \quad (1) \quad \text{dir.}$$

$$\lim_{x \to 0} (-x^2) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \quad (2)$$

(1) ve (2) den Sıkıştırma Teo. göre $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot \cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$ dır.

⊛ $f(x) = \dfrac{\sqrt{|2x+5|-3}}{x^2+1}$ Tanım Kümesi?

$|2x+5|-3 \geq 0$ olmalı.

$|2x+5| \geq 3 \rightarrow 2x+5 \geq 3 \rightarrow x \geq -1$

$\rightarrow 2x+5 \leq -3 \rightarrow x \leq -4$

$D(f) = (-\infty, -4] \cup [-1, \infty)$

⊛ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ Tanım kümesi?

$|x|-x > 0$ olmalı $\Rightarrow |x| > x \Rightarrow x < 0 \Rightarrow D(f) = (-\infty, 0)$

⊛ $f(x) = \sqrt{\ln \dfrac{5x-x^2}{4}}$ Tanım Kümesi?

$\ln \dfrac{5x-x^2}{4} \geq 0 \rightarrow \dfrac{5x-x^2}{4} \geq 1 \rightarrow 5x-x^2 \geq 4$

$\downarrow$

$4-5x+x^2 \leq 0$ olmalı.

$(x-1)(x-4) \leq 0$

	1		4	
+		−		+

$D(f) = [1, 4]$

⊛ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) = ?$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{|x|}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}} + \sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}}\right)} = \dfrac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$

⊛ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} = ?$

$(\sqrt{1+x^2}+1)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{1+x^2-1}\cdot(\sqrt{1+x^2}+1) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{1}\cdot \underbrace{(\sqrt{x^2+1}+1)}_{2} = 2$$

⊛ $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{1}{1-x}\cdot \cos\dfrac{\pi x}{2}\right) = ?$ $\quad t = 1-x$

$x\to 1^- \Rightarrow t\to 0^+$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\cdot \cos\frac{\pi}{2}(1-t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right) = \sin\frac{\pi}{2}t$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\cdot \sin\frac{\pi}{2}t$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}}_{1}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

⊛ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot \sin\dfrac{1}{x} = ?$

I. Yol

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\infty}\cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{1} = \infty$$

II. Yol (Dönüşüm)

$\dfrac{1}{x} = t \quad x\to\infty \Rightarrow t\to 0^+$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2}\cdot \sin t = \lim_{t\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\infty}\cdot \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1} = \infty$$

⊛ $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\cdot \sin\dfrac{1}{x} = ?$

I. Yol

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{1}\cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{0} = 0$$

II. Yol (Dönüşüm)

$\dfrac{1}{x} = t \quad x\to\infty \Rightarrow t\to 0^+$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot \sin t = \lim_{t\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1}\cdot \underbrace{\sqrt{t}}_{0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2} = ?$$

$$(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x . \cos 2x}{x^2 . (1+\cos x\sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\overbrace{(1-\sin^2 x)}^{\cos^2 x} . \overbrace{(1-2\sin^2 x)}^{\cos 2x}}{x^2 . (1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-3\sin^2 x+2\sin^4 x)}{x^2} . \frac{1}{1+\cos x\sqrt{\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{3\sin^2 x - 2\sin^4 x}{x^2}\right] . \frac{1}{1+\cos x . \sqrt{\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1} . \underbrace{\left(3-2\sin^2 x\right)}_{3} . \underbrace{\frac{1}{1+\cos x\sqrt{\cos 2x}}}_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 2x} = ?$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 2x} . \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{1+\cos 2x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos^2 2x}}{\sin 2x} . \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{|\sin 2x|}^{-\sin 2x}}{\sin 2x} . \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}} = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{-\sin 2x}{\sin 2x}}_{-1} . \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ *

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ **

$$(\sqrt{x}+2\sqrt{2}) . (\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{\overbrace{(\sqrt{x}-2\sqrt{2}) . (2\sqrt{2}+\sqrt{x})}^{**\text{'dan } x-8} . (\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\underbrace{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}_{*\text{'dan } x-8} . (\sqrt{x}+2\sqrt{2})} = \lim_{x\to 8} \frac{\cancel{x-8}}{\cancel{x-8}} . \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x}+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = ?$$ $x = t^{12}$ olsun. $x \to 1 \Rightarrow t \to 1$

$$\lim_{t\to 1} \frac{t^4-1}{t^3-1} = \lim_{t\to 1} \frac{\overset{t+1}{\cancel{(t^2-1)}}\,(t^2+1)}{\cancel{(t-1)}\,(t^2+t+1)} = \frac{2.2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2} = ?$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2} \cdot \frac{1+\cos x^2}{1+\cos x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1-\cos^2 x^2}^{\sin^2 x^2}}{x^2 . \sin x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x^2}{x^2}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x^2}}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

(*)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{1-\sin x}} = ?$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}\cdot\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}\cdot\sqrt{1+\sin x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\cos^2 2x}\cdot(\sqrt{1+\sin x})}{\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^2 2x}\cdot\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{\cos^2 x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin 2x|\cdot\sqrt{1+\sin x}}{|\cos x|\cdot\sqrt{1-\cos 2x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cdot\overbrace{|\sin x|}^{1}\cdot\cancel{|\cos x|}\cdot\overbrace{\sqrt{1+\sin x}}^{\sqrt{2}}}{\cancel{|\cos x|}\cdot\underbrace{\sqrt{1-\cos 2x}}_{\sqrt{2}}} = \underline{\underline{2}}$$

(*) $$\lim_{\theta\to 1} \frac{\theta-1}{\theta-\cos(\theta-1)} = ?$$

$\theta-1=x$ olsun. $\theta\to 1$ ise $x\to 0$ olur.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{0}} = \underline{\underline{1}}$$

$$\circledast \quad \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{\sqrt{x}-1}$$ limitinin varlığını araştırınız.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} - \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = -2$$

$\neq \Rightarrow$ $x=1$ de limit mevcut değil

$$\circledast \quad \lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{2x^2-1}}{2-\sqrt{5-x^2}} = ?$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-\sqrt{2x^2-1}).(x+\sqrt{2x^2-1}).(2+\sqrt{5-x^2})}{(2-\sqrt{5-x^2})(2+\sqrt{5-x^2}).(x+\sqrt{2x^2-1})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-2x^2+1)(2+\sqrt{5-x^2})}{(4-5+x^2)(x+\sqrt{2x^2-1})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\overset{-1}{\cancel{(1-x^2)}}.(2+\sqrt{5-x^2})}{\cancel{(x^2-1)}.(x+\sqrt{2x^2-1})} = -\frac{4}{2} = \underline{\underline{-2}}$$

$$\circledast \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{\sin(x^2-x)} = ?$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x+2x-2}{\sin(x^2-x)} = \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{x^2-x}{\sin(x^2-x)}}_{1} + 2\overbrace{\frac{(x-1)}{\sin(x^2-x)}\cdot\frac{x}{x}}^{1} = \boxed{3}$$

YTÜ

0251321 MATEMATİK I - 1.VİZE SINAVI

12 Nisan 2008

Adı-Soyadı :

Numara :

Grup :

İmza :

1	2	3	4	5	Toplam

Sınav Süresi : 70 dakika

UYARI: YALNIZCA 4 SORU YANITLANACAKTIR.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos^2 x}{x^2}\right)\right]$ limitini hesaplayınız. (İşlemlerde L'Hopital kuralı kullanılmayacak.)

Cevap:

$$\lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos^2 x}{x^2}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)\right]$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(1)^2\right) = \mathbf{1.}$$

89

(*) $f(x)=\begin{cases} x.\sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ fonksiyonu $\forall x\in\mathbb{R}$ için sürekli midir?

*① $x\neq 0$ için $x.\sin\frac{1}{x}$ fonksiyonu süreklidir. Gerçekten;

$c\in\mathbb{R}-\{0\}$ için $\lim\limits_{x\to c} x.\sin\frac{1}{x}=c.\sin\frac{1}{c}=f(c)$ dir. Yani

fonk. $x\neq 0$ için süreklidir.

② * $x=0$ için

$\lim\limits_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x}=0$ dır. $\lim\limits_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$ olduğundan

$f(x)$ $x=0$ da süreklidir.

① ve ② den $f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ için süreklidir.

(*) $f(x)=\begin{cases} 2\sin x & , x\leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x+b & , -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \cos x & , x\geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ fonksiyonu $x=\frac{\pi}{2}$ ve $x=-\frac{\pi}{2}$ de sürekli ise $a,b=?$

$x=\frac{\pi}{2}$ 'de sürekli ise:

$$\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \underbrace{f(x)}_{a\sin x+b}}_{a+b}=\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \underbrace{f(x)}_{\cos x}}_{0}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow \boxed{a+b=0} \quad ①$$

$x=-\frac{\pi}{2}$ de sürekli ise:

$$\underbrace{\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \underbrace{f(x)}_{a\sin x+b}}_{-a+b}=\underbrace{\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \underbrace{f(x)}_{2\sin x}}_{-2}=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2.\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2 \Rightarrow \boxed{-a+b=-2} \quad ②$$

① ve ② den

$\left.\begin{aligned} a+b&=0 \\ -a+b&=-2 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} a&=+1 \\ b&=-1 \end{aligned}$

(*) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\sqrt{2+\cos x}}{1-\sqrt{1+\sin x}} = ?$

$(1+\sqrt{2+\cos x}) \quad (1+\sqrt{1+\sin x})$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{(1-\sqrt{2+\cos x})(1+\sqrt{2+\cos x})(1+\sqrt{1+\sin x})}{(1-\sqrt{1+\sin x})(1+\sqrt{1+\sin x})(1+\sqrt{2+\cos x})}$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{-(1+\cos x).\ (1+\sqrt{1+\sin x})}{-\sin x\ .\ (1+\sqrt{2+\cos x})} = \lim_{x\to\pi} \frac{\overbrace{(1-\cos^2 x)}^{\cancel{\sin^2 x}\ \sin x}}{\cancel{\sin x}} \cdot \frac{1+\sqrt{1+\sin x}}{1+\sqrt{2+\cos x}}$$

$(1-\cos x)$

$$= \lim_{x\to\pi} \underbrace{\sin x}_{0}\ .\ \underbrace{\frac{1+\sqrt{1+\sin x}}{1+\sqrt{2+\cos x}}}_{1} = \underline{\underline{0}}$$

(*) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ fonksiyonunun $x=1$ deki davranışını inceleyiniz.

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^2-1} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty \implies \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\Downarrow$

$f(x)$, $x=1$ de limite sahip değil

(*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2} & , x \neq 2 \\ 0 & , x = 2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=2$ deki sürekliliğini inceleyin. Süreksiz ise çeşidini belirtin.

$f(2)=0$ ✓ fonk. $x=2$ de tanımlı

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ olduğundan $f(x)$ in $x=2$ de limiti yok. Fonksiyon $x=2$ de süreksiz. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ olduğundan $x=2$ 'deki süreksizlik "sonsuz süreksizlik" tir.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a-\sqrt{2-x}}, & x\le 1\\[2mm] \dfrac{x-1}{x-\sqrt{3x^2-2}}, & 1<x<3\\[2mm] \dfrac{\sin\frac{x-3}{b}}{1-\sqrt{x-2}}, & x\ge 3\end{cases}$$

fonksiyonu $x=1$ ve $x=3$ de sürekli ise $a,b=?$

*

$f(x)$, $x=1$ de sürekli ise: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-\sqrt{3x^2-2}}=\lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{3x^2-2})}{-2\underbrace{\cancel{(x^2-1)}}_{x+1}}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{1}{a-\sqrt{2-x}}=\frac{1}{a-1}=f(1)$$

$$\frac{1}{a-1}=-\frac{1}{2}\to a-1=-2$$

$$\boxed{a=-1}$$

*

$f(x)$, $x=3$ de sürekli ise: $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=f(3)$

$$\lim_{x\to3^-}\frac{x-1}{x-\sqrt{3x^2-2}}=\frac{2}{3-5}=-1$$

$$\lim_{x\to3^+}\frac{\sin\frac{x-3}{b}\cdot(1+\sqrt{x-2})}{(1-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x-2})}=\lim_{x\to3^+}\frac{\sin\frac{x-3}{b}}{3-x}\cdot(1+\sqrt{x-2})$$

$$=\lim_{x\to3^+}\frac{\sin\frac{x-3}{b}}{\underbrace{\frac{x-3}{b}}_{1}}\cdot\frac{1}{-b}\cdot\underbrace{(1+\sqrt{x-2})}_{2}=-\frac{2}{b}$$

$$-\frac{2}{b}=-1\Rightarrow\boxed{b=2}$$

(*) Sıkıştırma Teoremini kullanarak $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\text{Cos}\pi x}{1+x^2} = 0$ olduğunu gösteriniz.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \text{Cos}x \le 1$ dir. O halde

$$-1 \le \text{Cos}\pi x \le 1 \rightarrow -1 \le -\text{Cos}\pi x \le 1 \rightarrow 0 \le 1-\text{Cos}\pi x \le 2$$

$$\downarrow$$

$$0 \le \frac{1-\text{Cos}\pi x}{1+x^2} \le \frac{2}{1+x^2} \quad (1)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0 \quad (2)$$

(1) ve (2) den $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\text{Cos}\pi x}{1+x^2} = \underline{\underline{0}}$

(*) $f(x) = \begin{cases} \frac{x\,\text{Sin}x}{1-\text{Cos}x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$ da sürekli midir? Süreksiz ise süreksizliği kaldırılabilir mi? Nasıl?

$$\lim_{x\to 0} \frac{x.\text{Sin}x}{1-\text{Cos}x}\,(1+\text{Cos}x) = \lim_{x\to 0} \frac{x.\cancel{\text{Sin}}x}{\frac{1-\text{Cos}^2x}{\cancel{\text{Sin}^2}x\ \text{Sin}x}} . (1+\text{Cos}x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\text{Sin}x}}{1} . \frac{(1+\text{Cos}x)}{2}$$

$$= 2$$

$f(0) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$ olduğundan $f(x)$ $x=0$'da süreksiz. Bu süreksizlik kaldırılabilir süreksizliktir.

$f(0)=2$ olarak tanımlanırsa, yani:

$f(x) = \begin{cases} \frac{x\,\text{Sin}x}{1-\text{Cos}x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ olarak tanımlanırsa fonk. $x=0$ da sürekli olur.

⊛ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{|x-2|}, & x\neq 2 \\ 4, & x=2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=2$ deki sürekliliğini araştırınız. Süreksiz ise çeşidini belirtiniz.

$f(2)=4$ ✓ fonk. $x=2$ de tanımlı

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} \frac{\overset{x+2}{\cancel{x^2-4}}}{\cancel{x-2}}=4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} \frac{\overset{x+2}{\cancel{x^2-4}}}{-(\cancel{x-2})}=-4$$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)\neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ olduğundan fonk. $x=2$ de limiti mevcut değil. Dolayısıyla süreksiz.

$\lim_{x\to 2^+} f(x)\neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ olduğundan $x=2$ de sıçramalı süreksizlik var.

NOT: Sağ ve sol süreklilik sorulsaydı:

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=4$ olduğundan fonk. $x=2$ de sağdan sürekli; ancak $\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq f(2)=4$ olduğundan $x=2$ de soldan süreksizdir cevabı verilirdi.

⊛ $f(x)=\dfrac{x-1}{2-\sqrt{5-x}}$ fonksiyonunun $x=1$ de sürekli olması için $f(1)$ nasıl tanımlanmalıdır?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\underset{(2+\sqrt{5-x})}{2-\sqrt{5-x}}}=\lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{4-5+x}\cdot(2+\sqrt{5-x})=4$$

$f(1)=4$ olarak tanımlanırsa $f(x)$, $x=1$ de sürekli olur.

(*) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x} & , x<0 \\ 1+a & , x=0 \\ \dfrac{x-b}{2x+1} & , x>0 \end{cases}$ fonksiyonunun $\forall x \in \mathbb{R}$ için sürekli olması için a ve b ne olmalıdır?

$x<0$ için; $\dfrac{\sin 3x}{x}$ ve $x>0$, için $\dfrac{x-b}{2x+1}$ fonksiyonları süreklidir. Dolayısıyla $f(x)$ in $\forall x \in \mathbb{R}$ de sürekli olması için $x=0$'da sürekli olmalıdır.

$x=0$ da sürekli ise:

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \underbrace{f(x)}_{\frac{x-b}{2x+1}} = \lim_{x\to 0^-}}_{1} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\frac{\sin 3x}{x}} = \underbrace{f(0)}_{1+a}}_{2} \quad \text{olmalı.}$$

1 den:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-b}{2x+1} = -b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \underbrace{\dfrac{\sin 3x}{3x}}_{1} \cdot 3 = 3 \end{array}\right] \rightarrow -b=3 \rightarrow \boxed{b=-3}$$

2 den:

$$3=1+a \Rightarrow \boxed{a=2}$$

(*) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|2x-3|-x}}{x^3-1}$ fonksiyonunun tanım kümesi?

① $|2x-3|-x \geq 0$ olmalı $\rightarrow$ $2x-3 \geq x \rightarrow \boxed{x \geq 3}$
veya
$2x-3 \leq -x \rightarrow \boxed{x \leq 1}$

② $x^3-1 \neq 0$ olmalı $\Rightarrow$ $\boxed{x \neq 1 \text{ olmalı}}$

① ve ② den $D(f)=(-\infty,1) \cup [3,\infty)$

(*) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}\,x^2-3\sqrt{3}}{x^3-3\sqrt{3}}$ fonksiyonunun $x=\sqrt{3}$ de sürekli olması için $f(\sqrt{3})$ nasıl tanımlanmalıdır?

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}\,x^2-3\sqrt{3}}{x^3-3\sqrt{3}} = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}\,(x^2-3)}{x^3-(\sqrt{3})^3}$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}\cdot\cancel{(x-\sqrt{3})}\,\overbrace{(x+\sqrt{3})}^{2\sqrt{3}}}{\cancel{(x-\sqrt{3})}\,\underbrace{(x^2+x\sqrt{3}+3)}_{9}} = \frac{2}{3}$$

$f(\sqrt{3})=\frac{2}{3}$ olarak tanımlanırsa $f(x)$, $x=\sqrt{3}$ de sürekli olur.

(*) $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}} = ?$

$$\lim_{x\to 3^+} \underbrace{\frac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}}}_{\underbrace{\sqrt{\frac{x-3}{\sin(x-3)}}}_{1}} = \boxed{1}$$

⊛ $x^2-x+1=3$ denkleminin $[1,3]$ aralığında bir çözüme sahip olduğunu gösteriniz.

$f(x)=x^2-x+1$ olsun.

$f(1)=1$ $\quad f(3)=7$ dir.

Fonksiyon sürekli olduğundan ve $3=3$ $f(1)=1$ ve $f(3)=7$ arasında olduğundan Aradeğer Teoremine göre $[1,3]$ aralığında $f(c)=3$ olacak şekilde bir sayı vardır. $(c=2)$

⊛ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}-1} = ?$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = -2$$

$\neq$ limit mevcut değildir

⊛ $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}.\sin\dfrac{1}{x} = 0$ olduğunu Sıkıştırma Teo. ile gösterin.

Her $x\neq 0$ için $\quad -1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ dir.

$\sqrt{x}$ ile çarp

$$\left.\begin{array}{l} -\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \leq \sqrt{x} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0 \end{array}\right\}$$

Sıkıştırma Teo. göre $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}.\sin\frac{1}{x} = \underline{\underline{0}}$

⊛ $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+3}-2}$ fonksiyonu hangi x değeri/değerleri için süreksizdir? Bu süreksizlik nasıl kaldırılabilir?

$\sqrt{x^2+3}-2=0 \rightarrow x^2+3=4 \rightarrow \boxed{x=\mp 1}$ için fonk. süreksiz.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{3x^2+1}-2)}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x\to 1}\frac{(3x^2\cancel{+1-4})\overbrace{(\sqrt{x^2+3}+2)}^{4}}{(x^2\cancel{+3-4}).\underbrace{(\sqrt{3x^2+1}+2)}_{4}} = 3$$

$(\sqrt{3x^2+1}+2)\ (\sqrt{x^2+3}+2)$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x\to -1}\frac{(3x^2\cancel{+1-4})\overbrace{(\sqrt{x^2+3}+2)}^{4}}{(x^2\cancel{+3-4})\underbrace{(\sqrt{3x^2+1}+2)}_{4}} = 3$$

$(\sqrt{3x^2+1}+2)\ (\sqrt{x^2+3}+2)$

$f(1)=f(-1)=3$ olarak tanımlanırsa $f(x)$ $x=1$ ve $x=-1$ de sürekli olur.

⊛ $f(x)=\sin(\ln x)+\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-|x|}}$ fonksiyonunun tanım kümesi?

$\ln x$ için: $\boxed{x>0}$ olmalı.

$\sin x$: $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlır

$1-|x|>0$ olmalı.

↓

$|x|<1 \rightarrow \boxed{-1<x<1}$ olmalı

$\boxed{T.K: (0,1) \text{ aralığı}}$

(*)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{\sin\sqrt{x}} & , x>0 \\ 1-a & , x=0 \\ \dfrac{x-b}{2x+1} & , x<0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x=0$ da sürekli olması için $a,b=?$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ olmalı.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 3x}{\sin\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}}_{1}\cdot\underbrace{3\sqrt{x}}_{0}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x-b}{2x-1}=b \longrightarrow \boxed{b=0}$$

$$f(0)=1-a \longrightarrow 1-a=0 \rightarrow \boxed{a=1}$$

(*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+x}}\right)=?$ $\rightarrow \infty-\infty$ belirsizliği

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x.\sqrt{x^2+x}-x^2}{\sqrt{x^2+x}}\quad(x\sqrt{x^2+x}+x^2)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x^2+x)-x^4}{\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{|x|.\sqrt{1+\frac{1}{x}}}.\,(x\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}^{\,1}}{\cancel{x^3}.\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{0}}.\left(\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{0}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$