4-) $y - xy' = \frac{1}{(y')^2}$ diferansiyel denkleminin genel ve tekil çözümlerini bulunuz. $y' = p$

Clariaut D.D

$y = xp + \frac{1}{p^2}$

$y' = \cancel{p} = \cancel{p} + xp' - \frac{2p'}{p^3} \Rightarrow p'\left(x - \frac{2}{p^3}\right) = 0$ /Σ11

1°) $p' = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow \boxed{G.G: \; y = xc + \frac{1}{c^2}}$

2°) $x - \frac{2}{p^3} = 0$ $\quad x = \frac{2}{p^3}$ } Tekil çözümün parametrik denk.

$y = \frac{2\cancel{p}}{p^{\cancel{3}2}} + \frac{1}{p^2} = \frac{3}{p^2}$

$p^3 = \frac{2}{x} \Rightarrow p = \left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$

$\Rightarrow y = 3\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{-2/3} = 3\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$ Tekil çözüm kartezyen denk.

veya $p^2 = \frac{3}{y} \Rightarrow p = \left(\frac{3}{y}\right)^{1/2}$

$\Rightarrow x = 2\cdot\left(\frac{3}{y}\right)^{-3/2} = 2\left(\frac{y}{3}\right)^{3/2} = \sqrt{\frac{4y^3}{27}}$ Tekil çözüm kartezyen Denk.

veya $\left.\begin{array}{l} p^3 = \frac{2}{x} \\ y = \frac{3}{p^2} \end{array}\right\} p^2 y = 3 \Rightarrow p^6 y^3 = 27 \Rightarrow y^3 = \frac{27}{p^6}$

$\Rightarrow y^3 = \frac{27}{4}x^2$ Tekil çözüm kartezyen denk.

veya $p^3 = \frac{2}{x} \Rightarrow p = \left(\frac{2}{x}\right)^{1/3} \Rightarrow y = x\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3} + \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$ Tekil çöz. kartezyen

veya $y = x^{2/3}\cdot 2^{1/3} + \frac{x^{2/3}}{2^{2/3}}$ "

Başarılar

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi Sınav Soru ve Cevap Kağıdı			NOT TABLOSU						
			1. S	2. S	3. S	4. S			TOPLAM
Adı Soyadı									
Öğrenci Numarası		Grup No							
Bölümü			Sınav Tarihi		12. 11. 2016				
Dersin Adı	**MAT2411 Diferansiyel Denklemler** 1. Yılİçi Sınavı		Sınav Süresi	70 dk	Sınav Yeri				
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı			İmza						

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ hom. D.D

1-) $\left(x^2 - y^2 e^{\frac{y}{x}}\right)dx + \left(x^2 + xy\right)e^{\frac{y}{x}}dy = 0$ $(x > 0, y > 0)$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

1. Yol: $\frac{dy}{dx} = \frac{-1 + \frac{y^2}{x^2}e^{y/x}}{1 + \frac{y}{x}e^{y/x}}$ $\quad \frac{y}{x} = u \quad y = ux \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$

$x\frac{du}{dx} + u = \frac{-1 + u^2e^u}{(1+u)e^u} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{-1 + \cancel{u^2e^u} - ue^u - \cancel{u^2e^u}}{(1+u)e^u}$

$\int \frac{(1+u)e^u du}{1+ue^u} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = -\ln x + \ln c$

$\ln t = -\ln x + \ln c$

$1 + ue^u = t$

$(e^u + ue^u)du = dt$

$(1+u)e^u du = dt$

$t\cdot x = c \Rightarrow (1 + ue^u)x = c$

$\Rightarrow G.G: \left(1 + \frac{y}{x}e^{y/x}\right)x = c$ $\quad \boxed{x + ye^{y/x} = c}$

2.yol $x \to \lambda x$, $y \to \lambda y \Rightarrow \lambda^2(x^2 - y^2e^{y/x})dx + \lambda^2(x^2 + xy)e^{y/x}dy = 0$ Hom. D.D

$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du$

$(x^2 - u^2x^2e^u)dx + (x^2 + x^2u)e^u(u\,dx + x\,du) = 0$

$(x^2 - u^2\cancel{x^2}e^u + ux^2e^u + u^2\cancel{x^2}e^u)dx + (x^3 + ux^3)e^u du = 0$

$x^2(1 + ue^u)dx + x^3(1+u)e^u du = 0$

$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(1+u)e^u}{1+ue^u}du = \int 0$ $\quad \ln x + \ln t = \ln c$

$tx = c \Rightarrow (1 + ue^u)x = c$

$\boxed{x + ye^{y/x} = c}$

$1 + ue^u = t$

$(1+u)e^u du = dt$

Başarılar

2-) $y^3y'+\frac{y^4}{2x}-x=0$, $y(1)=2$ $(x>0)$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

$y'+\frac{1}{2x}y=\frac{x}{y^3}$ Bernoulli $\Rightarrow$

$y^3y'+\frac{1}{2x}\underbrace{y^4}_{z}=x$ $\quad z=y^4 \Rightarrow z'=4y^3y'$

$\frac{z'}{4}+\frac{1}{2x}z=x \Rightarrow z'+\frac{2}{x}z=4x$ (l.n.D.D)

$z=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[\int e^{\int\frac{2}{x}dx}\cdot 4x\,dx+K\right]$

$z=\frac{1}{x^2}\left[\int x^2\cdot 4x\,dx+K\right]=\frac{1}{x^2}\left(4\frac{x^4}{4}+K\right)=x^2+\frac{K}{x^2}$

G.Ç: $\boxed{y^4=x^2+\frac{K}{x^2}}$ $\Rightarrow y(1)=2 \Rightarrow 2^4=1+K \Rightarrow K=15$

$\Rightarrow y^4=x^2+\frac{15}{x^2}$ //

veya

$\lambda(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=x^2$

$x^2z'+2xz=4x^3 \Rightarrow \int d(x^2z)=\int 4x^3 \Rightarrow x^2z=x^4+C$

$\Rightarrow z=\frac{x^4+C}{x^2} \Rightarrow$ G.Ç. $\boxed{y^4=\frac{x^4+C}{x^2}}$ $y(1)=2 \Rightarrow C=15$

$\Rightarrow y^4=\frac{x^4+15}{x^2}$ //

veya

$z'+\frac{2}{x}z=0 \Rightarrow \int\frac{dz}{z}+2\int\frac{dx}{x}=\int 0 \Rightarrow \ln z+2\ln x=\ln c$

$\Rightarrow z\cdot x^2=c$; $z=\frac{c}{x^2}$ $\quad c=c(x) \Rightarrow z'=\frac{c'x^2-c2x}{x^4}$

$\frac{c'x^2-\cancel{2cx}}{x^4}+\frac{2}{x}\cdot\frac{c}{x^2}=4x$ $\quad \frac{c'}{x^2}=4x \Rightarrow c'=4x^3$ $\quad c=x^4+K$

$z=\frac{x^4+K}{x^2} \rightarrow$ G.Ç $\boxed{y^4=\frac{x^4+K}{x^2}}$ $K=15$ $\quad y^4=\frac{x^4+15}{x^2}$ //

Başarılar

3-) $\overbrace{(4x+3y^2)}^{M}dx+\overbrace{2xy}^{N}dy=0$ diferansiyel denklemi için $\lambda(x)=x^n$ formunda bir integrasyon çarpanı bulunuz ve bu integrasyon çarpanı yardımı ile denklemin genel çözümünü elde ediniz.

$\frac{\partial M}{\partial y}=6y \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2y$

$f(x)=\frac{2y-6y}{-2xy}=\frac{2}{x}$

$\lambda(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=x^2$ //

veya

$x^n(4x+3y^2)=4x^{n+1}+3x^ny^2$

$x^n(2xy)=2x^{n+1}y$

$\frac{\partial(\lambda M)}{\partial y}=\frac{\partial(\lambda N)}{\partial x}$

$6\cancel{x^n}y=2(n+1)\cancel{x^n}y$

$6=2(n+1) \Rightarrow n=2$ $\quad \boxed{\lambda(x)=x^2}$

$(4x^3+3x^2y^2)dx+2x^3y\,dy=0=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

$\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3+3x^2y^2 \Rightarrow u(x,y)=x^4+x^3y^2+R(y)$?

$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^3y+R'(y)=2x^3y \Rightarrow R(y)=K$

$\Rightarrow u(x,y)=x^4+x^3y^2+K$

G.Ç: $u(x,y)=c_1$ idi

$x^4+x^3y^2+K=c_1$ $\quad c_1-K=c$

$\Rightarrow \boxed{x^4+x^3y^2=c}$ G.Ç

Başarılar

$$\underbrace{\left(x^2 - y^2 e^{y/x}\right)}_{P} dx + \underbrace{(x^2 + xy) e^{y/x}}_{Q} dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y e^{y/x} - y^2 \cdot \frac{1}{x} e^{y/x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = (2x+y) e^{y/x} + (x^2+xy)\left(-\frac{y}{x^2}\right) e^{y/x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(-2y - \frac{y^2}{x}\right) e^{y/x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \left(2x + \cancel{y} - \cancel{y} - \frac{y^2}{x}\right) e^{y/x} = \left(2x - \frac{y^2}{x}\right) e^{y/x}$$

Tam. D.D. değil.

$$f(x) = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{-Q} = \frac{\left(2x - \cancel{\frac{y^2}{x}} + 2y + \cancel{\frac{y^2}{x}}\right) e^{y/x}}{-(x^2+xy) e^{y/x}}$$

$$= \frac{2(\cancel{x+y})}{-x\,(\cancel{x+y})} = -\frac{2}{x}$$

$$\lambda(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$$

$$\left(1 - \frac{y^2}{x^2} e^{y/x}\right) dx + \left(1 + \frac{y}{x}\right) e^{y/x} dy = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{y^2}{x^2} e^{y/x} \Rightarrow \int \partial f = \int \left(1 - \frac{y^2}{x^2} e^{y/x}\right) dx$$

$$u = \frac{1}{x^2} \quad du = \frac{-2}{x^3} dx \qquad dv = e^{y/x} dx \quad v = \frac{1}{-\frac{y}{x^2}} e^{y/x}$$

$$f = \int dx - y^2 \int \frac{1}{x^2} e^{y/x} dx + R(y)$$

$$f = x - y^2 \left[\frac{1}{\cancel{x^2}}\left(-\frac{\cancel{x^2}}{y}\right) e^{y/x} - \int \frac{x^2}{y} e^{y/x} \left(-\frac{2}{x^3}\right) dx\right] + R(y)$$

$$u = \frac{1}{x} \quad du = -\frac{1}{x^2} dx \qquad dv = e^{y/x} dx \quad v = -\frac{x^2}{y} e^{y/x}$$

$$f = x - y^2 \left[-\frac{e^{y/x}}{x} + \frac{2}{y} \int \frac{e^{y/x}}{x} dx\right] + R(y)$$

$$f = x + \frac{y^2}{x} e^{y/x} - 2y \left[\frac{1}{\cancel{x}}\left(-\frac{x^{\cancel{2}}}{y}\right) e^{y/x} - \int \frac{\cancel{x^2}}{y} e^{y/x} \left(\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) dx\right] + R(y)$$

$$f = x + \frac{y^2}{x} e^{y/x} + 2x e^{y/x} - 2 \frac{x^2}{y} e^{y/x} + R(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} =$$