(*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\operatorname{Arctan}x^2}{1-xe^{1/x}} = ? \to \dfrac{\infty}{\infty} \to$ L'H.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{2x}{1+x^4}}{-e^{1/x}-x.\left(-\dfrac{1}{x^2}\right).e^{1/x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\overbrace{\dfrac{2x}{1+x^4}}^{0}}{\underbrace{e^{1/x}}_{1}\left(\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{0}-1\right)} = -1$$

(*) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\dfrac{1-e^x}{1+\operatorname{Sin}x}\right)^{1/x} = ?$ 1^∞ belirsizliği → Log Limit yapmalı!

$$y=\left(1+\frac{1-e^x}{1+\operatorname{Sin}x}\right)^{1/x} \overset{\ln \text{al}}{\Rightarrow} \ln y = \frac{1}{x}.\ln\left[1+\frac{1-e^x}{1+\operatorname{Sin}x}\right]$$

↓ Limit

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left[1+\dfrac{1-e^x}{1+\operatorname{Sin}x}\right]}{x} \to \frac{0}{0} \text{ L'H.}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{-\overset{1}{e^x}(1+\overset{0}{\operatorname{Sin}x})-\overset{1}{\operatorname{Cos}x}.(\overset{0}{1-e^x})}{(1+\operatorname{Sin}x)^2 \to 1}}{1+\dfrac{1-e^x \to 0}{1+\operatorname{Sin}x \to 1}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = -1 \Rightarrow \ln\left[\lim_{x\to 0^+} y\right] = -1$$

↓

$$\lim_{x\to 0^+} y = \underline{\underline{e^{-1}}}$$

(*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\operatorname{Cos}x^2}{x^2\operatorname{Sin}x^2}$ limitini L'Hopital kullanmadan çözünüz.

$(1+\operatorname{Cos}x^2)$ ile çarpıp bölelim

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1-\operatorname{Cos}^2x^2}^{\operatorname{Sin}^2x^2}}{x^2.\operatorname{Sin}x^2} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{Cos}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Sin}^{\cancel{2}}x^2}{x^2.\cancel{\operatorname{Sin}x^2}} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{Cos}x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{Sin}x^2}{x^2}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\operatorname{Cos}x^2}}_{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$f(x)=(\cos x)^x \cdot x^{\cos x} \Rightarrow f'(x)=? \rightarrow \text{Logaritmik Türev almalıyız}$$

$\downarrow \ln$ al

$$\ln f(x)=\ln\left[(\cos x)^x \cdot x^{\cos x}\right]$$

$$\ln f(x)=\ln(\cos x)^x+\ln x^{\cos x}$$

$$\ln f(x)=x\ln(\cos x)+\cos x.\ln x$$

$\downarrow$ Türev al

$$\frac{f'(x)}{\underbrace{f(x)}_{(\cos x)^x . x^{\cos x}}}=\ln\cos x+x.\frac{(-\sin x)}{\cos x}+(-\sin x).\ln x+\frac{\cos x}{x}$$

$$f'(x)=(\cos x)^x.x^{\cos x}.\left[\ln\cos x-x\tan x-(\sin x).\ln x+\frac{\cos x}{x}\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\operatorname{Arc}\sin x}-1}{\sqrt{1-x^2}-1}=? \quad \frac{0}{0}\rightarrow L'H.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)e^{x-\operatorname{Arc}\sin x}}{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{-x}}^{\frac{0}{0}\rightarrow L'H.}\cdot\lim_{x\to 0}e^{x-\operatorname{Arc}\sin x}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{-1}}_{0}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}e^{x-\operatorname{Arc}\sin x}}_{1}$$

$$=\underline{\underline{0}}$$

$$\sinh x=\frac{3}{4} \Rightarrow x=?$$

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{3}{4} \Rightarrow 4e^x-4e^{-x}=6 \Rightarrow 2e^x-2e^{-x}-3=0 \leftarrow e^x \text{ ile çarp}$$

$$2e^{2x}-2-3e^x=0$$

$$\downarrow$$

$$(e^x-2)(2e^x+1)=0$$

$$\boxed{e^x=2} \quad e^x=-\frac{1}{2} \times \text{ olamaz}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x=\ln 2}$$

(*) $\lim_{x\to 0} (e^x - x)^{2/\sin x^2} = ? \to 1^\infty$

$y = (e^x - x)^{2/\sin x^2} \to \ln y = \frac{2}{\sin x^2} \ln(e^x - x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln y = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^x - x)}{\sin x^2} \to \frac{0}{0}$

L'Hos.

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln y = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x - x}}{2x.\cos x^2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln y = 2 \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{(e^x - x)\cos x^2}}_{1} = 1$

$\left(\lim_{x\to 0} \underset{0/0 \to L'H}{\frac{e^x - 1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1 \right)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln y = \ln\left(\lim_{x\to 0} y\right) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e$

(*) $\lim_{x\to 0^+} (1 - \sqrt{1-x})^x = ? \to 0^0$

$y = (1 - \sqrt{1-x})^x \to \ln y = x \ln(1 - \sqrt{1-x})$

$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} x . \ln(1 - \sqrt{1-x}) \to 0.(-\infty)$

L'Hospital

$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1 - \sqrt{1-x})}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\frac{1}{+2\sqrt{1-x}}}{1-\sqrt{1-x}}}{-\frac{1}{x^2}}$

$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{2(\sqrt{1-x} - 1 + x)} \to \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{\frac{-2}{2\sqrt{1-x}} + 2} = 0 \to \lim_{x\to 0^+} \ln y = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = 1$

⊗ Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $y=\ln(\text{Arctan}x^2)$ $\Rightarrow$ $y'=\dfrac{\frac{2x}{1+x^4}}{\text{Arctan}x^2}$

g) $y=\text{Sinh}(e^{\text{Cosh}x})$

$y'=\text{Sinh}x.e^{\text{Cosh}x}.\text{Cosh}(e^{\text{Cosh}x})$

b) $y=\text{ArcSin}\,e^{x^2}$ $\Rightarrow$ $y'=\dfrac{2x.e^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$

h) $y=\text{Sech}(\ln(\text{Cos}x))$

$y'=-\dfrac{\text{Sin}x}{\text{Cos}x}.(-\text{Sech}(\ln\text{Cos}x).\text{Tanh}(\ln\text{Cos}x))$

c) $y=e^{\text{ArcCos}\ln(\text{Sin}x)}$ $\Rightarrow$ $y'=-\dfrac{\frac{\text{Cos}x}{\text{Sin}x}}{\sqrt{1-\ln^2(\text{Sin}x)}}.e^{\text{ArcCos}\ln(\text{Sin}x)}$

d) $y=\dfrac{\text{ArcSin}\,x^3}{\text{Arctan}(\text{Cosh}x)}$ $\Rightarrow$ $y'=\dfrac{\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}.\text{Arctan}(\text{Cosh}x)-\frac{\text{Sinh}x}{1+\text{Cosh}^2x}.\text{ArcSin}x^3}{[\text{Arctan}(\text{Cosh}x)]^2}$

e) $y=e^{\text{Sinh}x^3}.\text{Tanh}x^2$ $\Rightarrow$ $y'=3x^2.\text{Cosh}x^3.e^{\text{Sinh}x^3}.\text{Tanh}x^2+e^{\text{Sinh}x^3}.2x.\text{Sech}^2x^2$

f) $y=\log_3\text{Cot}e^x$ $\Rightarrow$ $y'=\dfrac{-e^x.\text{Cosec}^2e^x}{\text{Cot}e^x.\ln 3}$

⊗ $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\text{ArcSin}\,\dfrac{2x+1}{3}$ fonksiyonunun tanım kümesi?

$4-x^2\geq 0$ ve $-1\leq\dfrac{2x+1}{3}\leq 1$ olmalı

$\downarrow$

$\boxed{-2\leq x\leq 2}$

$\downarrow$

$-3\leq 2x+1\leq 3$

$\downarrow$

$\boxed{-2\leq x\leq 1}$

Tanım Kümesi: $[-2,1]$

⊛ $f(x)=\dfrac{1-\mathrm{Arcsin}(2-x)}{\sqrt{x^2-2x}}$ tanım kümesi?

$-1\le 2-x\le 1$ ve $x^2-2x>0$ olmalı

$\downarrow$ $\downarrow$

$-3\le -x\le -1$ $(x-2).x>0$

		0		2	
x^2-2x	+	0	−	0	+

$\downarrow$

$\boxed{1\le x\le 3}$

$\longrightarrow$ T.K: $(2,3]$ $\longleftarrow$

T.K: $[(-\infty,0)\cup(2,\infty)]\cap[1,3]=(2,3]$

⊛ $f(x)=\underbrace{\mathrm{Arccos}\,\dfrac{x-5}{2}}_{①}+\underbrace{\log_{10}(6-x)}_{②}+\underbrace{\sin\sqrt[3]{x-2}}_{③}$ Tanım kümesi

① için

$-1\le\dfrac{x-5}{2}\le 1$ için tanımlı

$\Downarrow$

$-2\le x-5\le 2$

$\Downarrow$

$\boxed{3\le x\le 7}$ $\rightarrow$

② için

$6-x>0$ için tanımlı.

$\Downarrow$

$\boxed{6>x}$

$\swarrow$

③ için

Sin ve $\sqrt[3]{\ }$ her $x\in\mathbb{R}$ için tanımlıdır.

T.K: $[3,6)$

T.K: $[3,6)$

⊛ $f(x)=\dfrac{x^3}{2}-\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)+4$ fonksiyonu için $[-2,2]$ aralığında $f(c)=3$ denklemini sağlayan bir c sayısının mevcudiyetini araştırınız.

$f(x)$, $[-2,2]$ de süreklidir.

$f(-2)=0$ $f(2)=8$ ve $f(-2)=0<k=3<f(2)=8$ olduğundan

Ara Değer Teoremine göre $f(c)=3$ olacak şekilde en az bir $c\in(-2,2)$ sayısı vardır.

(12) $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}\right)$ $\qquad$ $\dfrac{x^2-3x+2}{x+1} > 0$ olmalı

$x \neq 2 \quad x \neq 1 \quad x \neq -1$

		-1	1	2
x^2-3x+2	+	+	−	+
$x+1$	−	+	+	+
$\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$	−	+	−	+

T.K: $(-1,1) \cup (2,\infty)$

---

(13) $f(x) = \operatorname{ArcCos}\left(\log\dfrac{x}{10}\right)$ Tanım kümesini bulunuz

$-1 \leq \log\dfrac{x}{10} \leq 1$ olmalı ve $\dfrac{x}{10} > 0$ olmalı

$\downarrow$

$\dfrac{1}{10} \leq \dfrac{x}{10} \leq 10$ ve $x > 0$

$\downarrow$

$1 \leq x \leq 100$ ve $x > 0 \Rightarrow$ T.K: $[1,100]$

---

(14) $f(x) = \operatorname{ArcSin}(1-x) + \ln(\ln x)$ T.kümesi?

$-1 \leq 1-x \leq 1$, $\ln x > 0$, $\boxed{x > 0}$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$-2 \leq -x \leq 0$ $\qquad$ $\boxed{x > 1}$

$\downarrow$

$\boxed{0 \leq x \leq 2}$

T.K: $(1,2]$

---

(15) $f(x) = \ln(\ln(\ln x)) + \sqrt{9-x^2}$ Tanım Kümesi?

$\boxed{x > 0}$, $\ln x > 0$, $\ln(\ln x) > 0$, $9 - x^2 \geq 0$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$\boxed{x > 1}$ $\qquad$ $\ln x > 1$ $\qquad$ $\boxed{-3 \leq x \leq 3}$

$\downarrow$

$\boxed{x > e}$

T.K: $(e,3]$

$$\circledast \lim_{x\to 1^+} (2x-1)^{\cot \pi x} = ? \; 1^{\infty}$$

$$y=(2x-1)^{\cot \pi x} \qquad \ln y = \cot \pi x . \ln(2x-1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} \ln y = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(2x-1)}{\tan \pi x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{2}{2x-1}}{\pi . \frac{1}{\cos^2 \pi x}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{\pi} . \frac{\cos^2 \pi x}{2x-1} = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \ln y = \ln\left[\lim_{x\to 1^+} y\right] = \frac{2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1^+} y = \underline{\underline{e^{2/\pi}}}$$

$$\circledast \lim_{x\to\infty} x^2 . e^{\sqrt{x}-x^2} \qquad 0.\infty$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{x^2}{e^{x^2-\sqrt{x}}}}_{\frac{\infty}{\infty}} \overset{L'H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\left(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) e^{x^2-\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(2-\underbrace{\frac{1}{2x^{3/2}}}_{0}\right) \underbrace{e^{x^2-\sqrt{x}}}_{\infty}} = 0$$

$$\circledast \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\ln(x^2+1)} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-\ln(x^2+1)}{x^2 . \ln(1+x^2)} \quad \frac{0}{0}$$

$$\infty - \infty$$

$$\overset{L'H.}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x - \frac{2x}{x^2+1}}{2x . \ln(1+x^2) + x^2 . \frac{2x}{1+x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{2x(1+x^2)-2x}^{2x^3}}{2x(1+x^2)\ln(1+x^2)+2x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}\left[\underbrace{\left(2+\frac{2}{x^2}\right)\ln(1+x^2)}_{0}+2\right]}$$

$$= 1$$

2015 2. vize

S2. a) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$ limitini hesaplayınız. **(15p)**

0^0 belirsizliği var. (1)

$$y = x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{\ln(e^x-1)} \cdot \ln x \quad (2)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln(e^x-1)} \overset{(3)\ \frac{\infty}{\infty}}{\underset{L}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}} \quad (2)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{xe^x} \overset{(2)\ \frac{0}{0}}{\underset{L}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{e^x+xe^x} \ (2) = \frac{1}{1+0} = 1 \quad (1)$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = e \quad (2)$$

b) $0 < x < 1$ olmak üzere $f(x) = \arcsin x - \arccos\sqrt{1-x^2}$ ile tanımlı f fonksiyonunun türevini bulup, ortaya çıkan durumu yorumlayınız. **(10p)**

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (2) + \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \ (4) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{x\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (2)$$

(2) Her $x \in (0,1)$ için, $f'(x) = 0$ olduğundan $f(x)$ sabittir.

(Veya ; $f(x)$ fonksiyonunun eğrisi bu aralıkta yatay teğete sahiptir)

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi, II. Yıliçi Sınav Soru ve Cevap Kağıdı					
Adı Soyadı					
Öğrenci Numarası		Grup No			
Bölümü				Sınav Tarihi	05/12/2015
Dersin Adı	Mat1071 Matematik I	Sınav Süresi	100dk	Sınav Yeri	
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı				İmza	

NOT TABLOSU						
1. S	2. S	3. S	4. S			TOPLAM

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan *"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"* fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

S1. a) Kalkülüsün Temel Teoremini kullanarak, sürekli bir f fonksiyonu için $x > 0$ olmak üzere eğer $\int_0^{x^2} f(t)dt = x\arctan x$ ise $f(1)$ değerini bulunuz. **(10p)**

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}(x\arctan x) \quad (2)$$

$$2x f(x^2) - 0 = \arctan x + x\cdot\frac{1}{1+x^2} \quad (4)$$

$$x=1 \Rightarrow \quad 2f(1) = \arctan 1 + \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$f(1) = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4} = \frac{\pi+2}{8} \quad (2)$$

b) $f:(-\infty,1] \to \Re,\ f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$ fonksiyonunun tersinin mevcut olduğunu gösteriniz ve $(f^{-1})'(0)$ değerini hesaplayınız. **(15p)**

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - (1+x)\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1+x^2-(x+x^2)}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1-x}{(1+x^2)^{3/2}} \quad (4)$$

Her $x \in (-\infty,1)$ için $f'(x) > 0$ (2) dır. Dolayısıyla f fonksiyonu 1-1 olup değer kümesi üzerinde tersi mevcuttur. (2)

$$y_0 = f(x_0) \Rightarrow x_0 = f^{-1}(y_0) \Rightarrow \frac{1+x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} = 0 \Rightarrow x_0 = -1 \quad (3)$$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{\left.\frac{1-x}{(1+x^2)^{3/2}}\right|_{x_0=-1}} \ (3) = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad (1)$$

Başarılar dilerim.

92

(*) f fonksiyonu $f(x)=(\cos x^4)^{\operatorname{Arctan} x^2}$ şeklinde tanımlanmış türevlenebilir bir fonk. olsun. $f'(0)=?$

$$y=(\cos x^4)^{\operatorname{Arctan} x^2} \qquad x=0 \Rightarrow y=1$$

$$\downarrow$$

$$\ln y=\operatorname{Arctan} x^2 . \ln(\cos x^4)$$

$\downarrow$ Türev

$$\frac{y'}{y}=\frac{2x}{1+x^4}.\ln(\cos x^4)+\operatorname{Arctan} x^2 . \frac{4x^3.(-\sin x^4)}{\cos x^4}$$

$$\downarrow y=1,\ x=0$$

$$y'\Big|_{(1,0)}=\underline{\underline{0}}$$

(*) $f(x)=\operatorname{Arc}\sin\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun artan azalan olduğu aralıkları bulunuz

$f(x)=\operatorname{Arc}\sin\sqrt{1-x^2}$ Tanım kümesini bulalım.

$$\left.\begin{array}{l}-1\leq\sqrt{1-x^2}\leq 1\\ 1-x^2\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow 0\leq\sqrt{1-x^2}\leq 1 \Rightarrow \boxed{T.K: [-1,1]}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(1-x^2)}}=-\frac{x}{|x|.\sqrt{1-x^2}}$$

$\to f'$, 0'da tanımsız

x	-1	0	1
f'	+		−
f	↗		↘

$f(x)$, $(-1,0)$ da artan
$(0,1)$ de azalan

(*) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+x+\ln(1+x^2)$ fonk. tersinin mevcut olduğunu gösterip $(f^{-1})'(1)$ değerini bulunuz.

$f'(x)=1+\frac{2x}{1+x^2}$ olduğundan $\forall x\in[0,\infty)$ için $f'(x)>0$ d.r. Dolayısıyla artandır $\Rightarrow$ Birebirdir $\Rightarrow$ Tersi vardır. $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'(0)}=\underline{\underline{1}}$

$f^{-1}(1)=a \Rightarrow f(a)=1=1+a+\ln(1+a^2) \Rightarrow a=0$

(*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x}\right)=?\quad \infty-\infty$ belirsizliği

I. Yol

$$\lim_{x\to\infty} e^{x}\left(\sqrt{1+e^{-2x}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+e^{-2x}}-1}{e^{-x}}\to\frac{0}{0}\ \text{L'H.}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-2.e^{-2x}}{2.\sqrt{1+e^{-2x}}}}{-e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{e^{x}}_{\infty}.\underbrace{\sqrt{1+e^{-2x}}}_{1}}=0$$

II. Yol Eşlenik Çarpım ile:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x}}{1}\,\left(\sqrt{e^{2x}+1}+e^{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+1-e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}+e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{e^{x}+\sqrt{e^{2x}+1}}_{\infty}}=0$$

(*) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{\cosh x}\right)^{1/x}=?\ \to 1^{\infty}$ belirsizliği

$$y=\left(\frac{\cos x}{\cosh x}\right)^{1/x}\ \Rightarrow \ln y=\frac{1}{x}.\ln\left(\frac{\cos x}{\cosh x}\right)=\frac{1}{x}\left[\ln(\cos x)-\ln(\cosh x)\right]$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cos x)-\ln(\cosh x)}{x}\to\frac{0}{0}\ \text{L'H.}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{-\sin x}{\cos x}-\dfrac{\sinh x}{\cosh x}}{1}=0=\lim_{x\to 0^+}\ln y$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=0\ \Rightarrow \ln\Big(\underbrace{\lim_{x\to 0^+}y}_{1}\Big)=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}y=1}$$

2016 2. vize

4.a. $\lim_{x\to 4}\left[\frac{4}{\pi}\,arctan\left(\frac{x}{4}\right)\right]^{tan\left(\frac{\pi x}{8}\right)}$ limitini hesaplayınız.

$$\lim_{x\to 4}\left[\frac{4}{\pi}arctan\left(\frac{x}{4}\right)\right]^{tan\left(\frac{\pi x}{8}\right)} = 1^{\infty}$$

$$y = \left[\frac{4}{\pi}arctan\left(\frac{x}{4}\right)\right]^{tan\left(\frac{\pi x}{8}\right)} \Rightarrow \quad lny = tan\left(\frac{\pi x}{8}\right) ln\left[\frac{4}{\pi}arctan\left(\frac{x}{4}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to 4} lny = \lim_{x\to 4} tan\left(\frac{\pi x}{8}\right) ln\left[\frac{4}{\pi}arctan\left(\frac{x}{4}\right)\right] = \infty.0$$

$$\lim_{x\to 4} lny = \lim_{x\to 4}\frac{ln\left[\frac{4}{\pi}arctan\left(\frac{x}{4}\right)\right]}{cot\left(\frac{\pi x}{8}\right)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 4} lny = \lim_{x\to 4}\frac{\dfrac{\frac{4}{\pi}.\dfrac{\frac{1}{4}}{1+\frac{x^2}{16}}}{\frac{4}{\pi}arctan\left(\frac{x}{4}\right)}}{-\frac{\pi}{8}cosec^2\left(\frac{\pi x}{8}\right)} = -\frac{4}{\pi^2}$$

$$\lim_{x\to 4} lny = -\frac{4}{\pi^2} \quad \Rightarrow \lim_{x\to 4} y = e^{-\frac{4}{\pi^2}}$$

b. $f: R \to R^{+}$, $f(x) = e^{arctanx}$ fonksiyonunun tersinin mevcut olduğunu gösteriniz ve $(f^{-1})'(e^{\frac{\pi}{3}})$ değerini hesaplayınız.

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}e^{arctanx} > 0$ olduğundan fonksiyon artandır ve tersi mevcuttur.

$$f(a) = e^{arctana} = e^{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow arctana = \frac{\pi}{3} \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$(f^{-1})'\left(e^{\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{1}{f'(\sqrt{3})}$$

$$(f^{-1})'\left(e^{\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{1+3}e^{arctan\sqrt{3}}} = \frac{4}{e^{\frac{\pi}{3}}} = 4.e^{-\pi/3}$$

İyi Şanslar...

⊛ $f(x)=x-1+\frac{1}{x+1}$ fonksiyonunun artan / azalan olduğu aralıklar?

fonksiyonun tanım kümesi: $\mathbb{R}-\{-1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$ dur.

$f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0 \qquad x=0 \quad x=-2$

x	$-\infty$	-2	-1	0	∞
f'	+	0 −	−	0 +	
f	↗	↘	↘	↗	

Artan: $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$
Azalan: $(-2,-1)\cup(-1,0)$

⊛ $f(x)=x^2-2\ln(1+x^2)$ → artan / azalan old. aralıklar

Tanım kümesi: $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ ($1+x^2>0$ olduğundan, ln tanımlı)

$f'(x)=2x-\frac{4x}{1+x^2}=\frac{2x(x^2-1)}{1+x^2}=0 \qquad x=0 \quad x=1 \quad x=-1$

x		-1	0	1	
f'	−	0 +	0 −	0 +	
f	↘	↗	↘	↗	

Artan: $(-1,0)\cup(1,\infty)$
Azalan: $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

⊛ $\sin(xy)=1-x^2-y^2+x^2y^3$ eğrisinin x-eksenini kestiği noktaları bulunuz ve eğrinin bu noktalardaki teğet doğrularının paralel olup olmadığını belirleyiniz.
(2017 - 1. vize sorusu)

$\sin xy=1-x^2-y^2+x^2y^2 \qquad y=0 \Rightarrow 0=1-x^2 \Rightarrow x=\mp 1$ 'de ekseni keser

↓ Türev

$(y+xy')\cos xy=-2x-2yy'+2xy^3+x^2.3y^2.y'$

$m_1=y'\big|_{(1,0)}=-2 \qquad m_2=y'\big|_{(-1,0)}=-2 \Rightarrow$ eğimler eşit teğetler paralel

⊛ Aşağıdaki limitleri L'Hopital kullanmadan hesaplayın.

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ c) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x^2+3}\right)^{3x+5}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}$ e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2^x+4^x}{4^{x+1}+3^x}$ f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

Cevaplar

I. Yol

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \dfrac{2}{3}$

$(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1).(\sqrt{x}+1)$

eşlenik

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

eşlenik

II. Yol $x=a^6$ olsun. $x\to 1$ $a\to 1$

$\lim_{a\to 1} \dfrac{a^2-1}{a^3-1} = \lim_{a\to 1} \dfrac{a+1}{a^2+a+1} = \dfrac{2}{3}$

b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln\underbrace{(1+x)^{1/x}}_{e} = \ln e = 1$ $\left(\lim_{x\to 0^+} (1+ax)^{x} = e^a\right)$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x^2+3}\right)^{3x+5} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1-\dfrac{1}{x^2+3}\right)\right]^{\frac{3x+5}{x^2+3}\cdot x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \Bigg(\underbrace{\left(1-\dfrac{1}{x^2+3}\right)^{x^2+3}}_{e^{-1}}\Bigg)^{\underbrace{\frac{3x+5}{x^2+3}}_{0}}$

$= (e^{-1})^0 = \underline{1}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}_{1} \cdot \underbrace{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}}_{1} = 1$

e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2^x+4^x}{4^{x+1}+3^x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{4^x}\left(\overbrace{\frac{1}{2^x}}^{0}+1\right)}{\cancel{4^x}\left(4+\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^x}_{0}\right)} = \dfrac{1}{4}$

f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{3^x}\left(1-\overbrace{3^{-2x}}^{0}\right)}{\cancel{3^x}\left(1+\underbrace{3^{-2x}}_{0}\right)} = 1$

⊛ $y=\log\left(\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}\right)+\sqrt[3]{x+1}+\operatorname{ArcSin}\dfrac{x-3}{2}+3^{x^2-4}$ → T.Kümesi?

$\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}>0$ ve $-1\le \dfrac{x-3}{2}\le 1$ olmalı. ($\sqrt[3]{x+1}$ ve 3^{x^2-4} $\forall x\in\mathbb{R}$ için tanımlıdır)

$x=4$ $x=5$ $x=6$

$-2\le x-3\le 2$

x		4		5		6	
$\frac{x-5}{x^2-10x+24}$	$-$		$+$		$-$		$+$

① $\boxed{1\le x\le 5}$ ②

$\Rightarrow$ ① ve ② den T.K : (4,5)

⊛ $f(x) = (\sec x)^{\ln \sin x}$ $\quad f'(x) = ?$

$\ln f'(x) = (\ln \sin x)(\ln \sec x)$

↓ Türev

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \ln(\sec x) + (\ln \sin x) \cdot \frac{\sec x \cdot \tan x}{\sec x}$$

$$f'(x) = (\sec x)^{\ln \sin x} \left[\cot x \cdot \ln(\sec x) + (\ln \sin x) \cdot \tan x \right]$$

⊛ $f(x) = (\operatorname{cosec} x)^{\ln \sin x}$ ise $f'(x)$ türevinin en sade halini bulunuz.

$\ln f(x) = \ln \sin x \cdot \ln \operatorname{cosec} x$

$$\frac{f'}{f} = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \ln \operatorname{cosec} x + \ln \sin x \cdot \frac{-\cancel{\operatorname{cosec} x} \cdot \cot x}{\cancel{\operatorname{cosec} x}}$$

$$f' = (\operatorname{cosec} x)^{\ln \sin x} \left[\cot x \cdot \underbrace{\ln \operatorname{cosec} x}_{-\ln \sin x} + \ln \sin x \cdot (-\cot x) \right]$$

$$= -2 (\operatorname{cosec} x)^{\ln \sin x} \cot x \cdot \ln \sin x$$

29.10.2018

Bu sayfaya kadar anlayarak, elinize kalem alıp soruları çözerek geldiyseniz bu iş olmuş demektir :))

Hepinize 1. vizelerinizde başarılar dilerim...

Sevgiler,

Pınar Albayrak