4-) $a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0$ diferansiyel denkleminde $a_0, a_1$ ve $a_2$ fonksiyonları $a\le x\le b$ reel aralığında sürekli ve bu aralıktaki her $x$ için $a_0(x)\neq 0$ olsun. $f_1$ ve $f_2$ fonksiyonları verilen diferansiyel denklemin lineer bağımsız iki çözümü ve $A_1, A_2, B_1, B_2$ de $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ denklemini sağlayan sabitler olsun. Bu durumda verilen diferansiyel denklemin $A_1f_1+A_2f_2$ ve $B_1f_1+B_2f_2$ çözümlerinin de $a\le x\le b$ de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

$$w(f_1,f_2)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = f_1f_2'-f_1'f_2 \neq 0$$ $f_1, f_2$ lineer bağımsız olduğundan

$$\begin{vmatrix} A_1f_1+A_2f_2 & B_1f_1+B_2f_2 \\ A_1f_1'+A_2f_2' & B_1f_1'+B_2f_2' \end{vmatrix} = \cancel{A_1B_1f_1f_1'} + A_1B_2f_1f_2' + A_2B_1f_2f_1' + \cancel{A_2B_2f_2f_2'} - \cancel{A_1B_1f_1'f_1} - A_1B_2f_1'f_2 - A_2B_1f_2'f_1 - \cancel{A_2B_2f_2'f_2}$$

$$= (A_1B_2-A_2B_1)f_2'f_1 + (A_2B_1-A_1B_2)f_1'f_2$$

$$= (A_1B_2-A_2B_1)(f_2'f_1-f_1'f_2)$$

$A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ ve $f_2'f_1-f_1'f_2\neq 0$ olduğundan

$w(A_1f_1+A_2f_2,\ B_1f_1+B_2f_2)\neq 0$ dır dolayısıyla verilen çözüm fonksiyonları lineer bağımsızdırlar.



| YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi Sınav Soru ve Cevap Kağıdı | | | NOT TABLOSU | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1. S | 2. S | 3. S | 4. S | | | TOPLAM |
| Adı Soyadı | | | | | | | | | |
| Öğrenci Numarası | | Grup No | | | | | | | |
| Bölümü | | | Sınav Tarihi | | 17. 12. 2016 | | | | |
| Dersin Adı | MAT2411 Diferansiyel Denklemler 2. Yıliçi Sınavı | | Sınav Süresi | 75 dk | Sınav Yeri | | | | |
| Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı | | | İmza | | | | | | |

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan *"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"* fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

1-) $y''=(y')^3+y'$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y'=p \;,\; y''=p\frac{dp}{dy}$

$p\frac{dp}{dy}=p^3+p \Rightarrow$ i) $p=0$ için $y'=0 \Rightarrow y=c$

$\frac{1}{p^2+1}dp=dy$

$c_1$

$\arctan p = y+c_1$

$p=\tan(y+c_1)$

$y'=\tan(y+c_1)$

$\frac{dy}{dx}=\tan(y+c_1)$

$\frac{1}{\tan(y+c_1)}dy=dx$

$\frac{\cos(y+c_1)}{\sin(y+c_1)}dy=dx \Rightarrow \ln(\sin(y+c_1))=x+c_2$

$c_2$ unutulursa $-1$

2-) $y^{(4)}+2y''+y=3+\cos 2t$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$: y = y_h + y_ö = u + v$

$u^{(4)}+2u''+u=0 \Rightarrow r^4+2r^2+1=0$ ; $r^2=m$ denirse

$m^2+2m+1=0$

$(m+1)^2=0 \Rightarrow m_1=m_2=-1$

$r_{1,2}^2=-1 \Rightarrow r_{1,2}=\pm i$

$r_{3,4}^2=-1 \Rightarrow r_{3,4}=\pm i$

$y_h=u=c_1\cos t+c_2\sin t+t(c_3\cos t+c_4\sin t)$ veya

$\left(y_h=(c_1+c_2t)\cos t+(c_3+c_4t)\sin t\right)$

$v^{(4)}+2v''+v=3+\cos 2t$ nin bir özel çözümü

$v=A+B\cos 2t+C\sin 2t$ $\qquad y_{01}=A$

$v'=-2B\sin 2t+2C\cos 2t$ $\qquad y_{01}'=y_{01}''=y_{01}'''=y_{01}^{IV}=0$

$v''=-4B\cos 2t-4C\sin 2t$ $\qquad A=3$

$v'''=8B\sin 2t-8C\cos 2t$ $\qquad y_{01}=3$

$v^{(4)}=16B\cos 2t+16C\sin 2t$

Denklemde yerine yazılırsa

$16B\cos 2t+16C\sin 2t-8B\cos 2t-8C\sin 2t+A+B\cos 2t$
$+C\sin 2t=3+\cos 2t$

$(16B-8B+B)\cos 2t+(16C-8C+C)\sin 2t+\cancel{A}=\cancel{3}+\cos 2t$

$A=3$, $9B=1 \Rightarrow B=1/9$, $9C=0 \Rightarrow C=0$

$y_ö=v=3+\frac{1}{9}\cos 2t$

$y=y_h+y_ö=(c_1+c_2t)\cos t+(c_3+c_4t)\sin t+3+\frac{1}{9}\cos 2t$



3-) $x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{1}{x\sin(\ln x)}$, $x>0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{\sin(\ln x)}$

$x=e^t, x>0, t=\ln x$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$ veya $\left(\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$ veya $\left(\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\right)$

$\cancel{x^2}\frac{1}{\cancel{x^2}}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}\frac{dy}{dt}+y=\frac{1}{\sin t}$ $\qquad \left(e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+e^{t}e^{-t}\frac{dy}{dt}+y=\frac{1}{\sin t}\right)$

$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\frac{1}{\sin t}$ $\qquad y(t)=y_h(t)+y_ö(t)$

$u''+u=0 \Rightarrow m^2+1=0 \Rightarrow m_1=i, m_2=-i$

$y_h=c_1\cos t+c_2\sin t$ $\qquad y_ö=c_1(x)\cos t+c_2(x)\sin t$ bir özel ~~çözüm~~ olsun.

$\begin{cases}\cos t\, c_1'+\sin t\, c_2'=0\\ -\sin t\, c_1'+\cos t\, c_2'=\frac{1}{\sin t}\end{cases} \Rightarrow W(\cos t,\sin t)=\begin{vmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{vmatrix}=1$

$c_1'(t)=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & \sin t\\ \frac{1}{\sin t} & \cos t\end{vmatrix}}{1}=-1 \Rightarrow c_1(t)=-t$

$c_2'(t)=\dfrac{\begin{vmatrix}\cos t & 0\\ -\sin t & \frac{1}{\sin t}\end{vmatrix}}{1}=\frac{\cos t}{\sin t} \Rightarrow c_2(t)=\ln(\sin t)$

$y_ö=-t\cos t+\ln(\sin t)\sin t$

$y(t)=y_h(t)+y_ö(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+t\cos t+\ln(\sin t)\sin t$

$y(x)=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)+\ln x\cos(\ln x)$
$+\ln(\sin(\ln x))\sin(\ln x)$