25

4) $y'' + y(y')^3 = 0$ diferansiyel denkleminin $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$ koşullarına uyan çözümünü bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} y' = p \\ y'' = p\dfrac{dp}{dy} \end{array}\right\} \quad p\frac{dp}{dy} + yp^3 = 0 \Rightarrow p\left[\frac{dp}{dy} + yp^2\right] = 0$$

2

) $p = 0 \Rightarrow y = c$ çözüm olamaz. 3

) $\dfrac{dp}{dy} = -yp^2 \Rightarrow \dfrac{dp}{-p^2} = y\,dy$

$$\boxed{\frac{1}{p} = \frac{y^2}{2} + c_1}$$ 5

$1 = \frac{1}{2} + c_1 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{y^2+1}{2}$

2

$\dfrac{dy}{dx} = p = \dfrac{2}{y^2+1} \Rightarrow (y^2+1)dy = 2dx$

$$\boxed{\frac{y^3}{3} + y = 2x + c_2}$$ 5

$\frac{1}{3} + 1 = 2 + c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = -\frac{2}{3}}$ 2

$$\boxed{\frac{y^3}{3} + y = 2x - \frac{2}{3}}$$ 2

Başarılar...

YTU – Fen-Edebiyat Fakültesi ,
II. Vize Sınav Soru ve Cevap Kağıdı

Not Tablosu

1. S	2. S	3.S	4. S	Toplam
25	25	25	25	100

Adı Soyadı			
Numarası		Grup NO	
Bölümü		Tarih	05.12.2015
Dersin Adı	MAT2411 DİFERANSİYEL DENKLEMLER	Süre	90 dk
		Sınıf	
Öğretim Üyesi	CEVAP ANAHTARI	İmza	

YÖK'nün 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

25

1) $y''' - 4y' = (x^2 + 4) + e^{2x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$r^3 - 4r = 0 \Rightarrow r(r^2 - 4) = 0 \quad r_1 = 0,\ r_2 = 2,\ r_3 = -2$

$$\boxed{y_h = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{p_1} = (ax^2+bx+c)x = ax^3+bx^2+cx \\ y_{p_1}' = 3ax^2+2bx+c \\ y_{p_1}'' = 6ax+2b \\ y_{p_1}''' = 6a \end{array}\right\} \quad 6a - 12ax^2 - 8bx - 4c = x^2 + 4$$

$-12a = 1 \qquad -8b = 0 \qquad 6a - 4c = 4$

$\boxed{a = -\frac{1}{12}} \qquad \boxed{b = 0} \qquad \boxed{c = -\frac{9}{8}}$

$$\boxed{y_{p_1} = -\frac{1}{12}x^3 - \frac{9}{8}x}$$

4

$$\left.\begin{array}{l} y_{p_2} = kxe^{2x} \\ y_{p_2}' = ke^{2x} + 2kxe^{2x} \\ y_{p_2}'' = 2ke^{2x} + 2ke^{2x} + 4kxe^{2x} = 4ke^{2x} + 4kxe^{2x} \\ y_{p_2}''' = 8ke^{2x} + 4ke^{2x} + 8kxe^{2x} = 12ke^{2x} + 8kxe^{2x} \end{array}\right\} \quad [12k + 8kx - 4k - 8kx]e^{2x} = e^{2x}$$

$8k = 1$

$\boxed{k = \frac{1}{8}}$

$$\boxed{y_{p_2} = \frac{1}{8}xe^{2x}}$$

$$\boxed{y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} - \frac{1}{12}x^3 - \frac{9}{8}x + \frac{1}{8}xe^{2x}}$$

Başarılar...

25

3) $y'' - 2y' + y = \frac{xe^x}{1+x^2}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü sabitin değişimi yöntemiyle bulunuz.

$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \quad r_1 = r_2 = 1$

$\boxed{y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x}$

$c_1' e^x + c_2' x e^x = 0$

$c_1' e^x + c_2' e^x + c_2' x e^x = \frac{x e^x}{1+x^2}$

$-c_2' e^x = -\frac{x e^x}{1+x^2} \Rightarrow c_2' = \frac{x}{1+x^2}$

$\boxed{c_2 = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k_2}$

$c_1' = -c_2' x = \frac{-x^2}{1+x^2} \Rightarrow c_1' = \frac{1}{1+x^2} - 1$

$\boxed{c_1 = \arctan x - x + k_1}$

$\boxed{y = k_1 e^x + k_2 x e^x + e^x \arctan x + \frac{x e^x}{2} \ln(1+x^2)}$

Başarılar...

25

2) $y'' - (x+2)y' = 0$ diferansiyel denkleminin $x_0 = -2$ noktası civarındaki seri çözümünün ilk 5 terimini bulunuz.

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$

$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+2)^{n-1}$

$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x+2)^{n-2}$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x+2)^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+2)^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x+2)^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+2)^n = 0$

$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n\right] (x+2)^n = 0$

$2a_2 = 0 \qquad a_{n+2} = \frac{n a_n}{(n+2)(n+1)} \quad n \geq 1$

$\boxed{a_2 = 0}$

$a_3 = \frac{a_1}{3.2} = \frac{a_1}{3!}$

$a_4 = \frac{2a_2}{4.3} = 0$

$a_5 = \frac{3a_3}{5.4} = \frac{3a_1}{5!}$

$y(x) = a_0 + a_1(x+2) + \frac{a_1}{3!}(x+2)^3 + \frac{3a_1}{5!}(x+2)^5 + \dots$

veya

$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x+2)^{n-2} - (x+2) \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x+2)^{n-1} = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x+2)^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x+2)^n = 0$

$\sum_{n=\cancel{0}2}^{\infty} n(n-1) a_n (x+2)^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} (n-2) a_{n-2} (x+2)^{n-2} = 0$

$\sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1) a_n - (n-2) a_{n-2}\right] (x+2)^{n-2} = 0$

$a_n = \frac{(n-2) a_{n-2}}{n(n-1)} \quad n \geq 2$

$a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{a_1}{3!} \quad a_4 = 0$

$y(x) = a_0 + a_1\left[(x+2) + \frac{(x+2)^3}{3!} + \frac{3(x+2)^5}{5!} + \dots\right]$

Başarılar...