$$y.e^{2xy}dx + 2bxe^{2xy}dy = -xdx$$

a) $b \in \mathbb{R}$'nin hangi değerleri için tam D.D olur?
b) Bu b değeri için dif. denk.i çözünüz.

$$ye^{2xy}dx + xdx + 2bxe^{2xy}dy = 0$$

$$\underbrace{(ye^{2xy}+x)}_{P}dx + \underbrace{2bxe^{2xy}}_{Q}dy = 0$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ise tam dif. denkdir.

$$e^{2xy} + y.2x.e^{2xy} = 2b.e^{2xy} + 2bx.2y.e^{2xy}$$

$$\cancel{e^{2xy}}(1+2xy) = 2b\cancel{e^{2xy}}(1+2xy)$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$ye^{2xy}dx + xe^{2xy}dy = -xdx$$

$$(ye^{2xy}+x)dx + xe^{2xy}dy = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{2xy}+x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{2xy}$$

$$u = \int_x (ye^{2xy}+x)\,dx + R(y) = \frac{e^{2xy}}{2} + \frac{x^2}{2} + R(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xe^{2xy} = xe^{2xy} + \frac{dR}{dy} \Rightarrow \frac{dR}{dy} = 0 \Rightarrow R(y) = k = \text{sbt}$$

$$u = \frac{e^{2xy}}{2} + \frac{x^2}{2} + k = C$$

$$\frac{e^{2xy}}{2} + \frac{x^2}{2} = c - k$$

Yüksek Mertebeden Lineer Dif. Denk.

$$a_0(x).y^{(n)} + a_1(x).y^{(n-1)} + a_2(x).y^{(n-2)} + \dots + a_{(n-1)}(x).y' + a_n(x)y = B(x)$$

Burada $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ ve $B(x)$ $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin belli bir A alt aralığında tanımlı sürekli olup $a_0(x) \neq 0$ olsun.
Eğer $B(x)=0 \Rightarrow$ Bu dif. denk. ikinci tarafsız (homojen) lineer dif. denk.
Eğer $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ katsayıları sabit ise bu dif. denklemlere sabit katsayılı lineer dif. denk. denir.

Lineer Bağımsızlık

Yüksek mertebeden dif. denklemleri sağlayan birden fazla çözüm bulunabilir. Önemli olan bu çözümlerin lineer bağımsızlığıdır.

Tanım: Eğer tümü sıfır olmayan $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ sabitleri $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ aralığındaki tüm x değerleri için $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + c_nf_n(x) = 0$ bağıntısı sadece $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ için sağlanıyor ise $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ lin. bağımsızdır. Aksi halde en az biri sıfırdan farklı ise $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ lin. bağımlıdır.

Tanım: $I=[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonları n mertebeye kadar sürekli türevleri mevcut olsun. Bu fonksiyonların I aralığında lineer bağımsız olması için

$$\underbrace{W(f_1,f_2,\dots,f_n)}_{\substack{\text{veya} \\ W}} = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}_{n\times n} \neq 0$$

olmasıdır. Bu determinanta wronski det. denir.

(Wronskien)

Örn: a ve b iki reel sayı ; $b \neq 0$ 'dır. $y_1 = e^{ax}\cos bx$, $y_2 = e^{ax}\sin bx$ fonk. tüm reel eksende lineer bağımsızdır. Gösteriniz.

$$W(e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx) = \begin{vmatrix} e^{ax}\cos bx & e^{ax}\sin bx \\ a.e^{ax}.\cos bx + e^{ax}.(-b\sin bx) & a.e^{ax}.\sin bx + e^{ax}.b\cos bx \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{b}_{\neq 0}.\underbrace{e^{2ax}}_{\neq 0} \neq 0$$

Yüksek Mertebeden Lineer Dif. Denk. Çözümü

$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{(n-1)}(x).y' + a_n(x)y = B(x)$ bu dif. denk. çözmek için önce ikinci tarafsız denklemin yanı
$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{(n-1)}(x)y' + a_n(x)y = 0$ dif. denkleminin n tane lineer bağımsız $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ çözümleri bulunur. Bu çözümler aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$u = c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + c_nf_n(x)$ (bu çözümün adı : $\underbrace{\text{ikinci tarafsız denklemin genel çözümü}}_{\text{(homojen kısmın)}}$ ")

Ayrıca ikinci taraflı yanı

$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{(n-1)}(x).y' + a_n(x)y = B(x)$ in özel çözümü de bulunur. Bu çözümü de V ile gösterirsek, verilen dif. denklemin genel çözümü

$\boxed{y = u + V}$ şeklindedir. Sabit katsayılı dif. denklemler için de durum aynıdır.

Sabit Katsayılı Lineer Dif. Denk. Çözümü

$y = u + V$ şeklinde idi.

Sabit katsayılı lineer dif. denk. ikinci tarafsız (homojen) kısmının genel çözümünün bulunması. ($u = ?$)

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_{(n-1)}y' + a_ny = 0$$

$\left.\begin{array}{l} y \to 1 \\ y' \to r \\ y'' \to r^2 \\ \vdots \\ y^{(n)} \to r^n \end{array}\right\}$ yazarsak ; $\underbrace{\underbrace{a_0r^n + a_1r^{n-1} + \dots + a_{n-1}r + a_n = 0}_{\text{n. dereceden polinom, karakteristik "}}}_{\text{n. dereceden denklem, karakteristik "}}$ şeklindeki bu denklemin n tane kökü bulunur. $r_1, r_2, \dots, r_n$

Karakteristik Denklemin Köklerine Göre u'yu İfade Etmek :

1) $r_1, r_2, \ldots, r_n$ basit kök ise

$$u = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots + c_n e^{r_n x}$$

Örn: $y'' - 5y' + 6y = 0$

$r^2 - 5r + 6 = 0$; -3, -2

$r_1 = 2$, $r_2 = 3$

$$u = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

Örn: $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$

$r^2(r-2) - (r-2) = 0$

$(r-2).(r^2-1) = 0$

$r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$

$$u = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$$

2) $r_1 = r_2 = \ldots = r_k = \lambda$ (k katlı kök) $\underbrace{r_{k+1}, r_{k+2}, r_{k+3}, \ldots, r_n}$ $(n-k)$ tane geriye kalan basit kök ise

$$u = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_k x^{k-1}) e^{\lambda x} + c_{k+1} e^{r_{k+1} x} + c_{k+2} e^{r_{k+2} x} + \ldots + c_n e^{r_n x}$$

Örn: $4y'' + 4y' + y = 0$

$4r^2 + 4r + 1 = 0$

$(2r+1)^2 = 0$

$r_1 = r_2 = -1/2$

$$u = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{1}{2}x}$$

Örn: $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + y' = 0$

$r^4 + 3r^3 + 3r^2 + r = 0$

$r(r^3 + 3r^2 + 3r + 1) = 0$

$r.(r+1)^3 = 0$

$r_1 = r_2 = r_3 = -1$ $\quad r_4 = 0$

$$u = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-x} + c_4 . e^{0x}$$

3) $r_{1,2} = \alpha \mp i\beta$ şeklinde kompleks kök ise

$r_1 = \alpha + i\beta$; $r_2 = \alpha - i\beta$

$$u = c_1 . e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 . e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$u = e^{\alpha x}\left(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}\right)$$

$$u = e^{\alpha x}\left[c_1(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) + c_2(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))\right)$$

$$u = e^{\alpha x}\left[\underbrace{(c_1 + c_2)}_{C_1}\cos\beta x + \underbrace{(c_1 i - c_2 i)}_{C_2}\sin\beta x\right]$$

Sonuç: $r_{1,2} = \alpha \mp i\beta$

$$u = e^{\alpha x}\left[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right]$$

Örn: $y^{IV} + 9y'' = 0$

$r^4 + 9r^2 = 0$

$r^2(r^2 + 9) = 0$

$r_1 = r_2 = 0$ $\quad r_{3,4} = 0 \mp 3i$

$$u = (c_1 + c_2 x) . e^{0x} + e^{0x}(c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x)$$

Örn: $y'' + 2y' + 2y = 0$

$r^2 + 2r + 2 = 0$

$$r_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4.1.2}}{2.1}$$

$$= \frac{-2 \mp 2i}{2} = -1 \mp 1i$$

$$u = e^{-1x}\left[c_1 . \sin 1x + c_2 \cos 1x\right]$$

4) $r_{1,2}=\alpha \mp i\beta$ kökü k katlı kök ise

$r_{1,2}=\alpha \mp i\beta$ $\quad y=e^{\alpha x}\left[c_1\sin\beta x+c_2\cos\beta x\right]$

$r_{1,2}=\alpha \mp i\beta$ (2. kat) $\quad y=e^{\alpha x}\left[(c_1+c_2x)\cdot\sin\beta x+(c_3+c_4x)\cos\beta x\right]$

$r_{1,2}=\alpha \mp i\beta$ (3. kat) $\quad y=e^{\alpha x}\left[(c_1+c_2x+c_3x^2)\sin\beta x+(c_4+c_5x+c_6x^2)\cos\beta x\right]$

$\vdots$

$r_{1,2}=\alpha \mp i\beta$ (k. kat) $\quad y=e^{\alpha x}\left[(c_1+c_2x+c_3x^2\cdots c_kx^{k-1})\sin\beta x+\ldots + (c_{k+1}+c_{k+2}x+\ldots+c_{2k}x^{k-1})\cdot\cos\beta x\right]$

Örnek $y^{iv}+2y''+y=0$

$r^4+2r^2+1=0$

$(r^2+1)^2=0 \longrightarrow r_{1,2}=0\mp i$ (2 katlı)

$y=e^{0x}\left[(c_1+c_2x)\sin x+(c_3+c_4x)\cos x\right]$

Uygulama

① $y=3xy'+7(y')^2$

$y'=p$

$y=3xp+7p^2$

$p=y'=3p+3x\frac{dp}{dx}+14p\frac{dp}{dx}$

$-2p=(3x+14p)\frac{dp}{dx}$ ... Lagrange

$\frac{dx}{dp}=-\frac{3x+14p}{2p}=-\frac{3x}{2p}-7$

$\frac{dx}{dp}+\frac{3x}{2p}=-7$ ... L.D.D

$P(p)=\frac{3}{2p}$, $Q(p)=-7$, $M=e^{\int P(p)dp}=e^{\int\frac{3}{2p}dp}=p^{3/2}$

$x=\frac{1}{M}\left[\int MQ\,dp\right]=\frac{1}{p^{3/2}}\left[\int p^{3/2}\cdot(-7)\cdot dp\right]$

$=\frac{1}{p^{3/2}}\left[-7\left(\frac{2}{5}\cdot p^{5/2}+c\right)\right]$

$x=\frac{1}{p^{3/2}}\left(-\frac{7p^{5/2}}{5/2}-7c\right)$

$y=3xp+7p^2$ genel çözüm parametrik denklemi

② $y'=1+t^2-2ty+y^2$ bir özel çözümü $y_1(t)=t$ old. göre genel çözüm?

$y_1(t)=t \Rightarrow y'=1$

$y=y_1+\frac{1}{z}$ dönüşümünü yapalım

$y'=1-\frac{z'}{z^2}=1-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dt}$

$\cancel{1}-\frac{z'}{z^2}=\cancel{1}+t^2-2t\left(t+\frac{1}{z}\right)+\left(t+\frac{1}{z}\right)^2$

$=1+\cancel{t^2}-\cancel{2t^2}-\cancel{\frac{2t}{z}}+\cancel{t^2}+\frac{1}{z^2}+\cancel{\frac{2t}{z}}$

$\frac{-z'}{z^2}=\frac{1}{z^2}$

$\frac{1+z'}{z^2}=0$

$z'=-1$

$\int\frac{dz}{dt}=\int -1$

$z=-t+c$

$y=t+\frac{1}{z}$ idi

$y=t+\frac{1}{(-t+c)}$ genel çözüm

③ a) $y=A^x$ eğri ailesinin dif denk. bulunuz. b) $y=A\ln\left(\frac{x}{B}\right)$

$y=A^x \rightarrow y'=A^x\cdot\ln A$

$\ln y=x\ln A$ $\quad y'=y\cdot\frac{\ln y}{x}$

$\ln A=\frac{\ln y}{x}$ $\quad y'\cdot x=y\ln y$

$y'x-y\ln y=0$

b)

$y'=\frac{\frac{1}{B}}{\frac{x}{B}}\cdot A=\frac{A}{x}$

$y''=-\frac{1}{x^2}A=-\frac{1}{x}\cdot\frac{A}{x}$ ($\frac{A}{x}\rightarrow y'$)

$y''=-\frac{1}{x}\cdot y'$

$y''+\frac{1}{x}y'=0$

c) $x = \sin(y+c)$

$1 = y' \cdot \cos(y+c)$

$\cos(y+c) = \sqrt{1-\underbrace{\sin^2(y+c)}_{x^2}}$

$1 = y' \cdot \sqrt{1-x^2}$

$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.yol

$\text{Arcsin}\,x = y + c$

$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(4) $y = c_1 x + c_2 x \ln x \rightarrow x(c_1 + c_2 \ln x) = y \rightarrow c_1 + c_2 \ln x = \dfrac{y}{x}$

$y' = c_1 + c_2 \ln x + c_2$

$y' = \dfrac{y}{x} + c_2$

$y'' = \dfrac{y' \cdot x - y \cdot 1}{x^2} = \dfrac{xy' - y}{x^2} = \dfrac{y'}{x} - \dfrac{y}{x^2} = y''$

(5) $x(y')^2 + (x-y)y' + 1 - y = 0$

$y' = p$

$xp^2 + (x-y)p + 1 = y$

$xp^2 + xp + 1 = (1+p)y$

$xp\cancel{(p+1)} + \dfrac{1}{1+p} = \cancel{(1+p)}\,y$

$xp + \dfrac{1}{1+p} = y$

$p = y' = p + x\dfrac{dp}{dx} - \dfrac{1}{(1+p)^2} \cdot \dfrac{dp}{dx}$

$0 = \left(x - \dfrac{1}{(1+p)^2}\right)\dfrac{dp}{dx}$

1) $\dfrac{dp}{dx} = 0 \rightarrow p = c$ genel çözüm

2) $x - \dfrac{1}{(1+p)^2} = 0 \qquad x = \dfrac{1}{(1+p)^2}$

$y = xp + \dfrac{1}{1+p}$ idi

$y = \dfrac{p}{(1+p)^2} + \dfrac{1}{1+p} = \dfrac{2p+1}{(1+p)^2}$

(6) $2yy' + 4x^3\sqrt{1-y^4} = 0$ $\quad y(1) = 0$ özel çözüm = ?

$\rightarrow x = 1 \quad y = 0$

$2y \cdot \dfrac{dy}{dx} + 4x^3\sqrt{1-y^4} = 0$

$2y\,dy + 4x^3\sqrt{1-y^4}\,dx = 0$

$\displaystyle\int \frac{2y}{\sqrt{1-y^4}}\,dy + \int 4x^3 dx = \int 0$ $\quad$ değ. A.D.D

$\text{Arcsin}\,y^2 + x^4 = c$

$\text{Arcsin}(0)^2 + 1^4 = C \Rightarrow \underline{C = 1}$

(7) $\dfrac{y}{x} + y'(2y + \ln x) = -x^2$

$\dfrac{y}{x}dx + (2y + \ln x)dy + x^2 dx = 0$

$\underbrace{\left(\dfrac{y}{x} + x^2\right)}_{P} dx + \underbrace{(2y + \ln x)}_{Q} dy = 0$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ✓ tam dif. $\quad u(x,y) = c$

$P(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow u(x,y) = \displaystyle\int\left(\frac{y}{x} + x^2\right)dx + R(y)$

$u(x,y) = y\ln x + \dfrac{x^3}{3} + R(y)$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \cancel{\ln x} + \dfrac{dR}{dy} = 2y + \cancel{\ln x}$

$\dfrac{dR}{dy} = 2y \rightarrow \int dR = \int 2y\,dy$

$R(y) = y^2 + k$

$c = y\ln x + \dfrac{x^3}{3} + y^2 + k$

$y\ln x + \dfrac{x^3}{3} + y^2 = c - k$