$y_1(x)=\sin x$ olan $2y'\cos x - y^2 = 2\cos^2 x - \sin^2 x$ $\quad y(0)=2$ başlangıç değer problemini çözün.

İkinci Taraflı Denklemin Bulunuşu $V=?$

Sabit katsayılı lineer bir dif. denklemin genel çözümünün $y=U+V$ şeklinde olduğunu biliyoruz. Burada $V=?$ için araştırma yapacağız.

İkinci Taraflı Denklemin Bulunuşunda Belirsiz Katsayılar Metodu

1-) İkinci taraf n. dereceden bir polinom ise :

V çözümü n. dereceden belirsiz katsayılı bir polinom olarak önerilir ve karakteristik denklemin köklerinde "0" kök var mı? kontrol edilir. Kaç adet 0 kök var ise o kadar kez x ile çarpım yapılır; türevleri ve kendisi dif. denk. yerine yazılarak belirsiz katsayılar bulunur.

Örnek $y''+y'-2y=x^2-1$ $\qquad V=ax^2+bx+c \rightarrow$ Karakteristik denk. köklerinde "0" kök yok, x ile çarpma!

$V'=2ax+b$

$V''=2a$

$r^2+r-2=0$ $\quad (+2,\ -1)$

$r_1=-2 \qquad r_2=1$

$u=c_1e^{-2x}+c_2e^{x}$

$y''+y'-2y=x^2-1$

$2a+2ax+b-2ax^2-2bx-2c=x^2-1$

$\underbrace{-2a}_{1}x^2+\underbrace{(2a-2b)}_{0}x+\underbrace{2a+b-2c}_{-1}=x^2-1$

$a=-1/2$

$b=-1/2$

$c=-1/4$

$V=ax^2+bx+c$ idi

$V=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

$y=u+v$ idi $\rightarrow$ "$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{x}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$"

Örnek $y''-y'=2x+1$ $\qquad V=x(ax+b) \longleftarrow$ "0" kök var 1 kez x ile çarp

$r^2-r=0$

$r(r-1)=0$

$r_1=0 \qquad r_2=1$

$u=c_1e^{0x}+c_2e^{1x}$

$V=ax^2+bx$

$V'=2ax+b$

$V''=2a$

$y''-y'=2x+1$

$2a-2ax-b=2x+1$

$\underbrace{-2a}_{2}x+\underbrace{2a-b}_{1}=2x+1$

$a=-1$

$b=-3$

$V=ax^2+bx$ idi

$V=-x^2-3x$

$y=u+v$ idi

"$y=c_1+c_2e^{x}-x^2-3x$"

Örnk $y'' = x^3+2$

$r^2=0$

$r_1=0 \quad r_2=0$

"$u=(c_1+c_2x).e^{0.x}$"

$v = x^2(ax^3+bx^2+cx+d)$ → 2 adet "0" kök var 2 kez x ile çarp

$v=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2$

$v'=5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx$

$v''=20ax^3+12bx^2+6cx+2d$

$y''=x^3+2$ idi $\quad \underbrace{20a}_{1}x^3+\underbrace{12b}_{0}x^2+\underbrace{6c}_{0}x+\underbrace{2d}_{2}=x^3+2$

$a=\frac{1}{20} \quad b=c=0 \quad d=1$

$v=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2$ idi ⇒ $v=\frac{1}{20}x^5+x^2$ $\quad y=u+v$ idi ⇒ "$y=c_1+c_2x+\frac{1}{20}x^5+x^2$"

2) İkinci taraf $Me^{\lambda.x}$ şeklinde üstel bir fonk. ise

v çözümü $K.e^{\lambda x}$ şeklinde önerilir ve karakteristik denklemin köklerinde λ var mı? kontrol edilir. Kaç adet λ var ise o kadar kez x ile çarpılır; türevleri ve kendisi dif. denk. yerine yazılarak K bulunur.

Örnk $y''-4y'+3y=4.e^{2x}$

$r^2-4r+3=0$

$r_1=3 \quad r_2=1$

$u=c_1e^x+c_2e^{3x}$

$v=K.e^{2x}$ → köklerde "2" yok - x ile çarpma!

$v'=2Ke^{2x}$

$v''=4Ke^{2x}$

$y''-4y'+3y=4e^{2x}$ idi → $4Ke^{2x}-8Ke^{2x}+3Ke^{2x}=4e^{2x}$

$-Ke^{2x}=4e^{2x}$

$K=-4$

$v=K.e^{2x}$ idi

$v=-4e^{2x}$ $\quad y=u+v$ → "$y=c_1e^x+c_2e^{3x}-4e^{2x}$"

Örnk $y''-5y'+6y=5e^{2x}$

$r^2-5r+6=0$

$r_1=3 \quad r_2=2$

$u=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$

$v=K.x.e^{2x}$ → köklerde 1 tane 2 var 1 kez x ile çarp

$v'=Ke^{2x}+Kx.2e^{2x}$

$v''=\underbrace{2Ke^{2x}+2Ke^{2x}}_{4Ke^{2x}}+2Kx.2e^{2x}$

$y''-5y'+6y=5e^{2x}$ idi

$4Ke^{2x}+4xKe^{2x}-5Ke^{2x}-10Kxe^{2x}+6Kxe^{2x}=5e^{2x}$

$-Ke^{2x}=5e^{2x}$

$K=-5$

$v=Kxe^{2x}$ idi, $v=-5xe^{2x}$

$y=u+x$ idi "$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}-5xe^{2x}$"

Örnk $4y''+4y'+y=3e^{-x/2}$

$4r^2+4r+1=0$

$2r \quad +1$

$2r \quad +1$

$(2r+1)(2r+1)=0$

$r_1=r_2=-1/2$

$u=(c_1+c_2x).e^{-1/2x}$

$v=K.x^2.e^{-x/2}$ → köklerde 2 adet $-\frac{1}{2}$ var 2 kez x ile çarp.

$v'=2Kxe^{-x/2}+Kx^2.(-\frac{1}{2})e^{-x/2}$

$v''=2Ke^{-x/2}+\underbrace{2Kx(-\frac{1}{2})e^{-x/2}+(-\frac{1}{2})K.2x.e^{-x/2}}_{-2Kxe^{-x/2}}+Kx^2(-\frac{1}{2})^2e^{-x/2}$

$4y''+4y'+y=3e^{-x/2}$

$8Ke^{-x/2}-8Kxe^{-x/2}+Kx^2e^{-x/2}+8Kxe^{-x/2}-2Kx^2e^{-x/2}+Kx^2e^{-x/2}=3e^{-x/2}$

$8Ke^{-x/2}=3e^{-x/2}$ → $\boxed{K=3/8}$

3) İkinci Taraf $M\sin(\lambda x)+N\cos(\lambda x)$ şeklinde ise

v çözümü $\alpha\sin(\lambda x)+\beta\cos(\lambda x)$ şeklinde önerilir ve karakteristik denk. köklerinde $\mp\lambda i$ var mı? kontrol edilir. Her $\mp\lambda i$ kökü için bir kez x ile çarpılır

Örnek $y''-5y'+6y=2\cos x+0.\sin x$ $\quad V=\alpha\sin x+\beta\cos x$ $\Rightarrow$ Kar. denk. köklerinde $\mp 1i$ yoktur x ile çarpmal

$r^2-5r+6=0$
$\quad -3 \quad -2$

$r_1=2 \quad r_2=3$

$u=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$

$V'=\alpha\cos x-\beta\sin x$
$V''=-\alpha\sin x-\beta\cos x$

$y''-5y'+6y=2\cos x+0.\sin x$

$-\alpha\sin x-\beta\cos x-5\alpha\cos x+5\beta\sin x+6\alpha\sin x+6\beta\cos x=2\cos x+0\sin x$

$\underbrace{(-\alpha+5\beta+6\alpha)}_{0}\sin x+\underbrace{(-\beta-5\alpha+6\beta)}_{2}\cos x=2\cos x+0\sin x$

$\left.\begin{array}{l}5\alpha+5\beta=0\\-5\alpha+5\beta=2\end{array}\right\}\quad \beta=\frac{1}{5}\quad \alpha=-\frac{1}{5}$

$V=\alpha\sin x+\beta\cos x$ idi $\quad V=-\frac{1}{5}\sin x+\frac{1}{5}\cos x$
$y=u+v$ idi

$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}-\frac{1}{5}\sin x+\frac{1}{5}\cos x$

Örnek $y''+4y=\sin 2x$ $\quad V=x(\alpha\sin 2x+\beta\cos 2x)$ $\rightarrow$ Bir adet $\mp 2i$ var 1 kez x ile çarp

$r^2+4=0$
$r_{1,2}=\mp 2i$

$u=(c_1\sin 2x+c_2\cos 2x).e^{0x}$

$V'=(\alpha\sin 2x+\beta\cos 2x)+x.2.(\alpha\cos 2x-\beta\sin 2x)$
$V''=\underbrace{2(\alpha\cos 2x-\beta\sin 2x)+2(\alpha\cos 2x-\beta\sin 2x)}_{4(\alpha\cos 2x-\beta\sin 2x)}+2x.2(-\alpha\sin 2x-\beta\cos 2x)$

$y''+4y=\sin 2x$ idi

$4(\alpha\cos 2x-\beta\sin 2x)+\cancel{4x(-\alpha\sin 2x-\beta\cos 2x)}+\cancel{4x(\alpha\sin 2x+\beta\cos 2x)}=\sin 2x$

$\underbrace{4\alpha}_{0}\cos 2x\underbrace{-4\beta}_{1}\sin 2x=\sin 2x$

$\beta=-1/4\ ,\ \alpha=0$

$V=x(\alpha\sin 2x+\beta\cos 2x)$ idi
$V=-\frac{x}{4}\cos 2x$

$y=u+v$ idi

$y=e^{0.x}(c_1\sin 2x+c_2\cos 2x)-\frac{x}{4}\cos 2x$

$r_{1,2}=\alpha\mp i\beta$
$u=e^{\alpha x}(c_1\sin(\beta x)+c_2\cos(\beta x))$

Uygulama

1-) $y' = \frac{-1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$ dif. denklemin bir özel çözümü $y_1(x) = \frac{1}{x}$ bilindiğine göre genel çözümü bulunuz.

$y = y_1(x) + \frac{1}{z}$ dön. yapalım

$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$

$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$

$\cancel{-\frac{1}{x^2}} - \frac{z'}{z^2} = \cancel{-\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2$

$\frac{-z'}{z^2} = \cancel{-\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{zx} + \cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{zx}$

$\frac{-z'}{z^2} = \frac{1}{zx} + \frac{1}{z^2}$

$-z' = \frac{z}{x} + 1$

$z' + \frac{z}{x} = -1$ ... LDD

$P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = -1$

$\mu = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$

$z = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu Q dx\right] = \frac{1}{x}\left(\int -x dx\right)$

$z = \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2} + c\right)$

$z = -\frac{x}{2} + \frac{c}{x}$

$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ idi

$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{c}{x} - \frac{x}{2}} \rightarrow$ g.ç

2-) $x^2 y' + 2xy - y^3 = 0$

$y' + \frac{2y}{x} = \frac{y^3}{x^2} \rightarrow$ Bernoulli

$z = y^{1-3} = \frac{1}{y^2}$ ⊛ $y^2 = \frac{1}{z}$

$z' = \frac{-2}{y^3} \cdot y'$ ⊛ $\frac{y'}{y^3} = -\frac{z'}{2}$

$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}$

$-\frac{z'}{2} + \frac{2}{x} \cdot z = \frac{1}{x^2}$

$z' - \frac{4}{x} z = \frac{-2}{x^2} \rightarrow$ LDD

$P(x) = \frac{-4}{x}, \quad Q(x) = \frac{-2}{x^2}$

$\mu = e^{\int P dx} = e^{\int -\frac{4}{x} dx} = x^{-4}$

$z = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu Q dx\right] = x^4\left(\int x^{-4}\left(\frac{-2}{x^2}\right) dx\right)$

$= x^4\left(\int \frac{-2}{x^6} dx\right)$

$= x^4 \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot x^{-5} + c\right)$

$z = \frac{2}{5x} + cx^4 \qquad y^2 = \frac{1}{z}$ idi

$y = \mp\sqrt{\frac{1}{\frac{2}{5x} + cx^4}} \rightarrow$ genel çözüm

3-) $\left(x\tan\left(\frac{y}{x}\right) + y\right)dx - x\,dy = 0$

$\frac{y}{x} = u \rightarrow y = ux \rightarrow y' = u + xu'$

$(\tan(u) + (u))dx - dy = 0$

$(\tan u + u) - \frac{dy}{dx} = 0 \quad \left(\frac{dy}{dx} \rightarrow y'\right)$

$(\tan u + \cancel{u}) = \cancel{u} + xu'$

$\tan u = x\frac{du}{dx}$

$\int \frac{1}{\tan u} du = \int \frac{1}{x} dx$

$\ln|\sin u| = \ln x + \ln c$

$\sin u = xc$

$u = \frac{y}{x}$ idi

$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = xc \rightarrow$ g.ç

4-) $y' - \frac{1}{x} y = y^{-2} \cdot \frac{x^3}{3} \sin x, \quad x \neq 0, y \neq 0$ g.ç = ?

(Bernoulli)

$z = y^{1-(-2)} = y^3$

• $z' = 3y^2 y'$

$3y^2 y' - \frac{3y^3}{x} = x^3 \sin x$

$z' - \frac{3}{x} z = x^3 \sin x$

$P(x) = -\frac{3}{x} \quad Q(x) = x^3 \sin x$

$\mu = x^{-3}$

$z = x^3\left(\int \cancel{x^{-3}} \cdot \cancel{x^3} \sin x\, dx\right) = x^3\left(\int \sin x\, dx\right) = x^3(-\cos x + c)$

$y = z^{1/3}$ idi $\qquad y = x(-\cos x + c)^{1/3} \rightarrow$ g.ç.

5-) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2+2xy-y^2}{3y^2+2xy-x^2}$ g.ç = ?

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3+2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{3\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\frac{y}{x}-1} \Rightarrow u+u'x=\frac{3+2u-u^2}{-1+2u+3u^2}$$

$$\Rightarrow (u+u'x)(-1+2u+3u^2)=3+2u-u^2$$

$\dfrac{y}{x}=u$ $y=ux$, $y'=u+u'x$

$$\frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dx}x$$

$$dy=u\,dx+x\,du$$

$$\Rightarrow \frac{u\,dx+x\,du}{dx}=\frac{3+2u-u^2}{-1+2u+3u^2}$$

$$u(-1+2u+3u^2)dx+x(-1+2u+3u^2)du=(3+2u-u^2)dx$$

$$(-u+2u^2+3u^3-3-2u+u^2)dx+x(-1+2u+3u^2)du=0$$

$$(3u^3+3u^2-3u-3)$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\left(\frac{-1+2u+3u^2}{3u^3+3u^2-3u-3}\right)du=\int 0$$

$u=\dfrac{y}{x}$ idi

$$\ln x+\frac{1}{3}\int\frac{-1+2u+3u^2}{u^3+u^2-u-1}du=\ln c$$

$$\ln x=\frac{1}{3}\ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^3+\left(\frac{y}{x}\right)^2-\left(\frac{y}{x}\right)-1\right|=\ln C \rightarrow \text{g.ç.}$$

$$\ln x+\frac{1}{3}\ln|u^3u^2-u-1|=\ln c$$

6-) $\dfrac{1}{x}y'+\dfrac{2}{x^2}y=-x(\sec x)^2y^2 \rightarrow \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{y'}{y^2}+\dfrac{2}{x^2}\cdot\dfrac{1}{y}=-x(\sec x)^2$

$$\frac{-z'}{x}+\frac{2}{x^2}\cdot z=-x(\sec x)^2$$

$$z=y^{1-2}=y^{-1}$$

$$z'=\frac{-1}{y^2}\cdot y' \rightarrow \frac{y'}{y^2}=-z'$$

$$z'-\frac{2}{x}z=x^2(\sec x)^2 \text{ --- LDD}$$

$$P(x)=\frac{-2}{x} \qquad Q(x)=x^2(\sec x)^2$$

$$\mu=e^{\int P\,dx}=e^{\int-\frac{2}{x}dx}=x^{-2}$$

$$z=x^2\left[\int x^{-2}\cdot x^2\cdot(\sec x)^2dx\right]=x^2(\tan x+c) \qquad y=\frac{1}{z}$$

$$y=\frac{1}{x^2(\tan x+c)} \rightarrow \text{g.ç.}$$

Örnek 4. mertebeden sabit katsayılı, ikinci tarafsız lineer dif. denklemin çözümlerinden ikisi xe^{2x} ve $\sin x$'dir. Bu dif. denk. yazınız ve genel çözümünü ifade ediniz.

$y=u+v$ ← ikinci tarafsız =0

$$y=c_1.e^{2x}+c_2.x.e^{2x}+c_3.\sin x+c_4.\cos x$$

$$r_1=r_2=2 \quad ; \quad r_{3,4}=\mp i$$

$(r-2)^2.(r^2+1)=0$ Bu dif. denk. karakteristik denklemi

$$(r^2-4r+4).(r^2+1)=0$$

$$r^4+r^2-4r^3-4r+4r^2+4=0$$

$$r^4-4r^3+5r^2-4r+4=0$$

Örn: 6. mertebeden sabit katsayılı lineer ikinci tarafsız dif. denk. çözümlerinden bazıları e^{2x}, $x^2.e^x$, $\cos 3x$ 'dir. Bu dif. denk. genel çözümünü yazınız. Dif. denk. bulunuz.

$$y = u + v \leftarrow 0$$
$$y = u$$

e^x $\cos 3x$
xe^x $\sin 3x$
x^2e^x

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 x^2 e^x + c_5 \cos 3x + c_6 \sin 3x$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = 1 \qquad r_4 = 2 \qquad r_{5,6} = \mp 3i$$

$$(r-1)^3 (r-2)(r^2+9) = 0$$

4) İkinci Tarafı $M(x).\sin\lambda x + N(x)\cos\lambda x$

$M(x) \rightsquigarrow m.$ dereceden bir polinom
$N(x) \rightsquigarrow n.$ " " "

derecesi büyük olan polinoma bakılır. Bu dereceye eşit dereceli iki adet belirsiz katsayılı $K(x)$ ve $R(x)$ polinomları yazılır.

" $V = K(x).\sin\lambda x + R(x).\cos\lambda x$ "

$$y'' + 2y' - 3y = 2\sin x + x.\cos x$$

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \qquad r_1 = -3 \quad r_2 = 1$$
$+3 \quad -1$

$$u = c_1.e^{-3x} + c_2.e^x$$

$$v = (a_1x + b_1)\sin x + (a_2x + b_2)\cos x$$
$$v' = a_1 \sin x + (a_1x + b_1)\cos x + a_2 \cos x + (a_2x + b_2).(-\sin x)$$
$$v' = (-a_2x + (a_1 - b_2))\sin x + (a_1x + (b_1 + a_2))\cos x$$
$$v'' = -a_2 \sin x + (-a_2x + (a_1 - b_2))\cos x + a_1 \cos x + (a_1x + (b_1 + a_2))(-\sin x)$$
$$v'' = (-a_1x + (-b_1 - 2a_2))\sin x + (-a_2x + (2a_1 - b_2))\cos x$$

$$(-a_1x + (-b_1 - 2a_2))\sin x + (-a_2x + (2a_1 - b_2))\cos x + (-2a_2x + 2a_1 - 2b_2)\sin x + (2a_1x + 2b_1 + 2a_2)\cos x$$
$$+ (-3a_1x - 3b_1)\sin x + (-3a_2x - 3b_2)\cos x = 2\sin x + x\cos x$$

$$\Big[\underbrace{(-a_1 - 2a_2 - 3a_1)}_{0}x + \underbrace{(-b_1 - 2a_2 + 2a_1 - 2b_2 - 3b_1)}_{2}\Big]\sin x + \Big[\underbrace{(-a_2 + 2a_1 - 3a_2)}_{1}x + \underbrace{(2a_1 - b_2 + 2b_1 + 2a_2 - 3b_2)}_{0}\Big].\cos x$$
$$= (0.x + 2)\sin x + (1.x + 0)\cos x$$

$$a_1 = 1/10 \qquad a_2 = -1/5 \qquad b_1 = -13/50 \qquad b_2 = -9/50$$

$$V = \left(\frac{1}{10}x - \frac{13}{50}\right)\sin x + \left(\frac{-1}{5}x - \frac{9}{50}\right)\cos x$$

$y = u + v$ idi

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x + \left(\frac{1}{10}x - \frac{13}{50}\right)\sin x + \left(\frac{-1}{5}x - \frac{9}{50}\right)\cos x$$