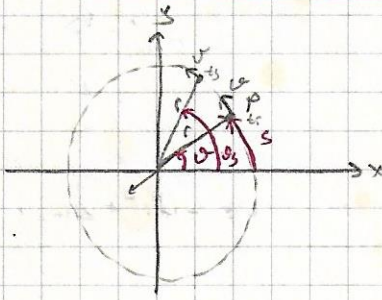


Katı Bir Cismin Sabit Bir Eksen Etrafında Dönmesi

Açılabilir Dönüşüm Hızı ve İvme



$$s = R\theta \rightarrow \theta = \frac{s}{R}$$

$$\frac{R}{2\pi} = \frac{0}{360} \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{0}{180}$$

$$t_1 \rightarrow \theta_1$$

$$t_2 \rightarrow \theta_2$$

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \rightarrow \text{açılabilir dönüşüm}$$

Parçacığın ortalama bir açısal hızı varsa

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \left(\frac{\text{radyan}}{s} \right)$$

ort. açısal hız $\rightarrow \omega$

Ortalama Açısal İvme

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \left(\frac{\text{rad}}{s^2} \right)$$

ort. açısal ivme ;

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{\text{radyan}}{s} \right)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \left(\frac{\text{rad}}{s^2} \right)$$

Açısal

Çizgisel

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \longleftrightarrow \Delta x = x_2 - x_1$$

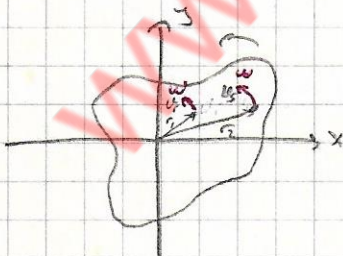
$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \longleftrightarrow \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \longleftrightarrow v = \frac{dx}{dt}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \longleftrightarrow \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \longleftrightarrow a = \frac{dv}{dt}$$

Sabit bir eksen etrafında dönen katı bir cisim üzerindeki her noktanın açısal hızı ve açısal ivmesi aynıdır.

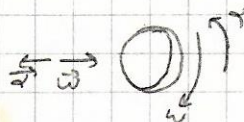


Açısal Hızın Vektörel Yönü

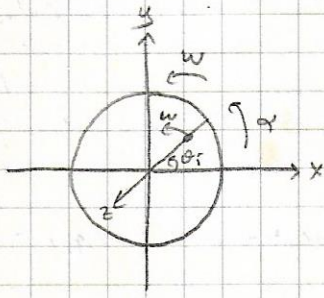
Sağ el kuralı

$\omega \rightarrow \omega$ yönüne

baş $\rightarrow \vec{\omega}$ vektör yönü



Dönme Kinematiği



Sabit Açısal İvmeli Dönme Hareketi

$$\alpha = s/t$$

$$a = s/t$$

$$\omega_s = \omega_i + \alpha t$$

$$\theta_s = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

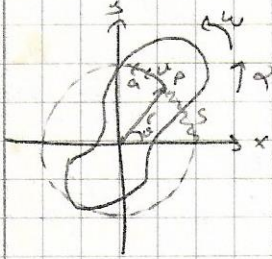
$$v_s = v_i + a t$$

$$x_s = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\omega_s^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_s - \theta_i)$$

$$v_s^2 = v_i^2 + 2a(x_s - x_i)$$

Açısal ve Doğrusal (Çizgisel) Nicelikler



$$s = r\theta$$

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$s = r\theta$$

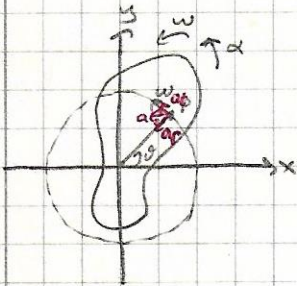
$$v = r\omega$$

$$a = r\alpha$$

$$v = r\omega$$

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

$$a = r\alpha$$



$$\alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow a_t = r\alpha$$

$$v = r\omega$$

$$a_t \parallel v$$

Parabolün v çizgisel hızı nedeniyle radyal ivmesi var.

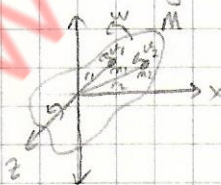
$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2} = \sqrt{r^2\omega^4 + r^2\alpha^2} \Rightarrow a = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

Dönme Enerjisi

Katı cismin küçük parçacıklarından oluştuğu ve z-ekseni etrafında sabit ω açısal hızı ile döndüğüne kabul edelim.



$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$+ K_n = \frac{1}{2} m_n v_n^2$$

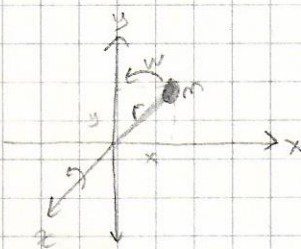
$$v_1 = r_1 \omega$$

$$v_2 = r_2 \omega$$

$$v_n = r_n \omega$$

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2$$

$$K = \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$



$n \rightarrow xy$ düzleminde

$$I_z = m r^2$$

$$K_z = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

$$I_x = m r^2$$

$$K_x = \frac{1}{2} I_x \omega^2$$

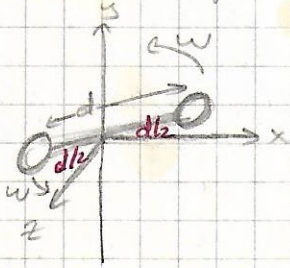
$$I_y = m r^2$$

$$K_y = \frac{1}{2} I_y \omega^2$$

$$\sum m_i r_i^2 = I \rightarrow \text{eylemsizlik momenti}$$

Katı cismin dönme eksenine uzaklığı
Cismin geometrisi, eylemsizlik momenti, beklir.

Soru 2 İki atomlu bir oksijen molekülü (O_2) ele alalım. Bu molekül, molekül uzunluğuna dik ve merkez geçen z eksen etrafında xy düzleminde döner. Her bir O_2 atomunun kütlesi $2,66 \cdot 10^{-26}$ kg ve orta sıradaki iki atom arasındaki mesafe $d = 1,21 \cdot 10^{-10}$ m'dir. Molekülün z eksen etrafında eylemsizlik momenti (I_z) = ?



O_2

$$I = \sum_{i=1}^2 m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$= m \left(\frac{d}{2} \right)^2 + m \left(\frac{d}{2} \right)^2$$

$$= 2m \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} m d^2$$

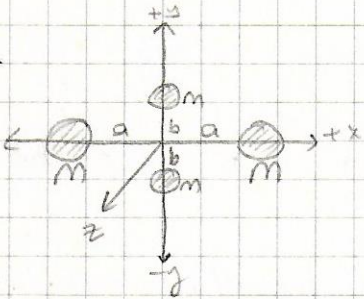
$$= \frac{1}{2} (2,66 \cdot 10^{-26}) (1,21 \cdot 10^{-10})^2$$

$$= 1,95 \cdot 10^{-46} \text{ kg m}^2$$

b) Molekül z eksen etrafında $\omega = 4,6 \cdot 10^{12}$ rad/s hızla döner ise dönme kinetik enerjisi = ?

$$K_{Dz} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (1,95 \cdot 10^{-46}) (4,6 \cdot 10^{12})^2 = 2,06 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

O_4



a) Sist. ω açısal hızı ile y eks. etrafında döner.

I_y ve K_{Dy} = ?

$$I_y = \sum_{i=1}^4 m_i r_i^2 = m a^2 + m a^2 + m b^2 + m b^2$$

$$I_y = 2m a^2 \rightarrow K_{Dy} = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2} (2m a^2) \omega^2$$

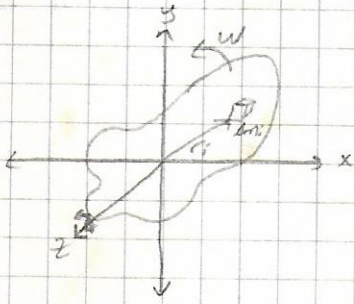
$$K_{Dy} = m a^2 \omega^2$$

b) I_z = ? K_{Dz} = ?

$$I_z = \sum_{i=1}^4 m_i r_i^2 = m b^2 + m b^2 + m a^2 + m a^2 = 2(m b^2 + m a^2)$$

$$K_{Dz} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} (2(m b^2 + m a^2)) \omega^2 = (m b^2 + m a^2) \omega^2$$

Katı Cismin Eylemsizlik Momentinin Hesabı

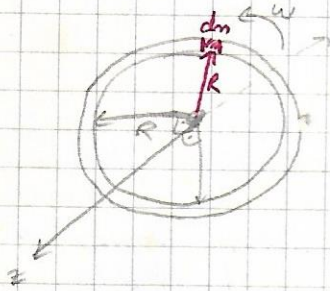


$$I_z = \sum_{i=1}^N r_i^2 \Delta m_i$$

$$\lim_{\substack{\Delta m_i \rightarrow 0 \\ \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

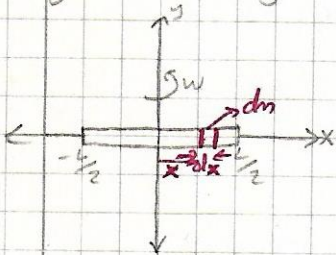
$$I = \int r^2 dm$$

Örnek 1 Yarıçapı R ve kütlesi M olan bir kürenin merkezinden geçen, kürele düzlemine dik bir eksene göre eylemsizlik momentini bulunuz.



$$I_z = \int r^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

Örnek 2 Boyu L ve kütlesi M olan düzgen katı bir cismin merkezinden geçen, cisme dik bir eksene göre eylemsizlik momentini bulunuz.



$$I = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \int x^2 \lambda dx = \lambda \int x^2 dx = \lambda \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

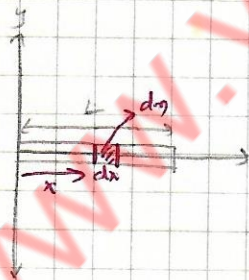
$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dx} \rightarrow dm = \lambda dx$$

$$I = \lambda \left(\frac{(L/2)^3}{3} - \frac{(-L/2)^3}{3} \right)$$

$$I = \frac{\lambda \cdot L^3}{12} \rightarrow \lambda = \frac{M}{L} \text{ idi}$$

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

b)



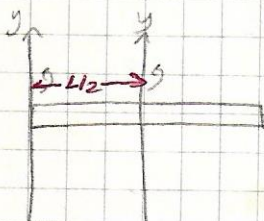
$$dm = \lambda dx$$

$$\lambda = M/L$$

$$I = \int x^2 dm = \int x^2 \lambda dx = \lambda \int_0^L x^2 dx = \lambda \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \lambda \frac{L^3}{3}$$

$$I = \left(\frac{M}{L} \right) \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} ML^2$$

Paralel Eksenler Teorisi Kütle merkezinden geçen bir eksene göre eylemsizlik momenti I_{cm} olsun. Kütle merkezinden geçen eksenlerden D kadar uzakta ve ona paralel bir eksene göre eylemsizlik momenti I ise ..

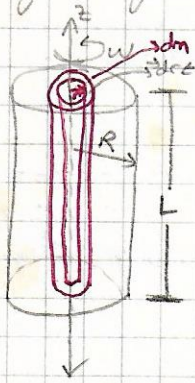


$$I = I_{cm} + MD^2$$

$$I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$$

$$I = I_{cm} + MD^2 = \frac{1}{12} ML^2 + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Örnek: Düzgün bir kati silindirin yarıçapı R , kütlesi M ve boyu L 'dir. Şekle göre eksenine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.



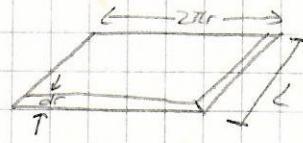
$$I = \int r^2 dm$$

$$\rho = \frac{M}{V}$$

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

$$dm = \rho dV$$

Silindirin küçük kısmı



$$dm = \rho (2\pi r) L dr$$

$$I = \int r^2 \rho 2\pi r L dr = 2\pi L \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi L \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$I = \frac{1}{2} \pi L \rho R^4$$

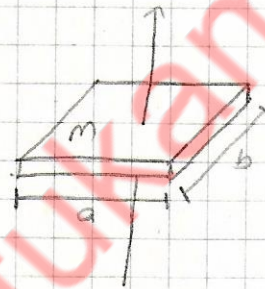
$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 L} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \pi L \frac{M}{\pi R^2 L} R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

$$I_{\text{dsk}} = I_{\text{silindire}} \quad \boxed{I = \frac{1}{2} M R^2}$$

İçer Döner Küre



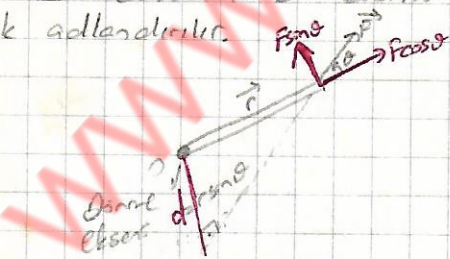
$$I = \frac{2}{5} M R^2$$



$$I = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

Tork (τ) Z

Bir kuvvetin bir cismin bir eksen etrafında döndürme eğilimi tork olarak adlandırılır.



$$\tau = r F \sin \theta \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = r F \sin \theta$$

$$\tau = d F$$

$$\tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$\tau_1 = F_1 d_1$$

$$\tau_2 = F_2 d_2$$

$$\tau = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r F \sin \theta \Rightarrow \text{Nm}$$

