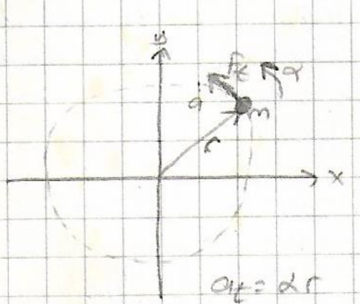
Tork ve Açısal İvme Arasındaki Bağıntı



$F_t \rightarrow$ r yarıçaplı yörüngeye uygulanan teğetsel kuvvet
m kütlesi x-y düzleminde

$F = ma$

$F_t = m a_t$

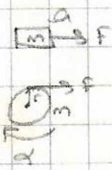
$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\tau = rF\sin\theta = rF\underbrace{\sin 90}_{1} \rightarrow \tau = rF$

$a_t = \alpha r$

$\tau = rF = rma_t = rm\alpha r = \underbrace{mr^2}_{I}\alpha \Rightarrow \boxed{\tau = I\alpha}$

$\alpha = \frac{\tau}{I}$

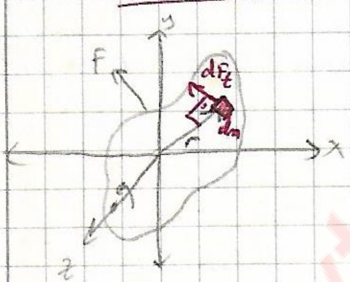


$F = ma$

$\tau = I\alpha$

Parçacığa etkiyen tork α açısal ivmesi ile orantılıdır.

Katı Cisim



$dF_t = (dm)a_t$

$\tau = rF\sin\theta$

$d\tau = rdF_t \underbrace{\sin 90}_{1}$

$d\tau = rdF_t$

$d\tau = ra_t dm = r r\alpha dm = r^2\alpha dm$

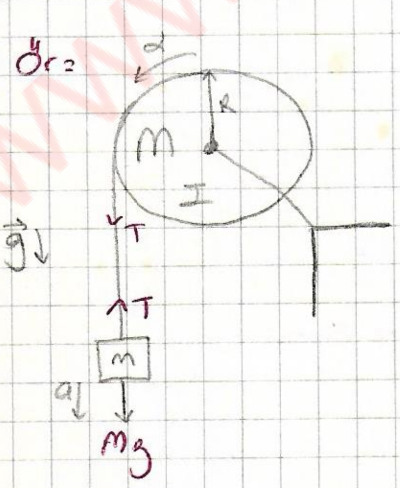
$a_t = r\alpha$

$\int d\tau = \int \alpha r^2 dm$

$\tau = \alpha \underbrace{\int r^2 dm}_{I}$

$\boxed{\tau = \alpha I}$

$\alpha \rightarrow$ tüm dm'ler için aynıdır.
Birden fazla kuvvet uygulanırsa $\quad \tau_{net} = \sum_i \tau_i = I\alpha$



$a = \alpha R$

$\tau = RT\sin\theta$
$= RT\sin 90$

$\boxed{\tau = TR}$

$\tau = TR = I\alpha$

$\alpha = \frac{TR}{I}$

$\sum F_y = mg - T = ma$

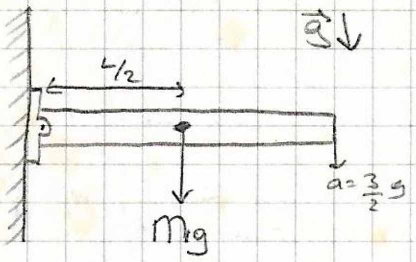
$a = \frac{mg - T}{m}$

$a = R\alpha = \frac{RTR}{I} = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m}$

$T = \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}}$

$a = \frac{g}{1 + I/mR^2}$ $\quad \alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + I/mR}$

Örnek Uzunluğu L, kütlesi M olan düzgün bir çubuk şekildeki gibi bir ucu etrafında sürtünmesiz dönebilecektir. Çubuk yatay durumdayken serbest bırakılıyor. Çubuğun ilk açısal ivmesi ve sağ ucunun ilk çizgisel ivmesi nedir?



$a=\alpha r \qquad I_0=\frac{1}{3}ML^2$

$\tau = I_0\alpha$

$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$

$\tau = rF\sin\theta$

$\tau = \frac{L}{2}.Mg$

$\frac{L}{2}Mg = I_0\alpha$

$\alpha = \frac{L}{2}\frac{Mg}{I_0}$

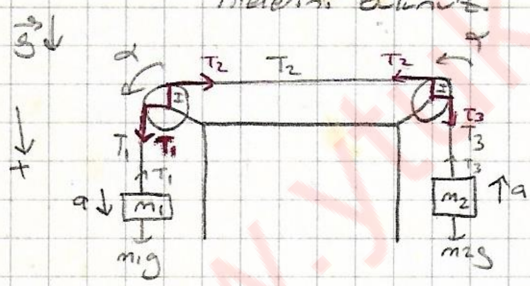
$\alpha = \frac{L}{2}.\frac{Mg}{\frac{1}{3}ML^2} = \boxed{\frac{3}{2}\frac{g}{L}}$

$a=\alpha r$

$a=\left(\frac{3g}{2L}\right)L = \boxed{\frac{3}{2}g}$

$a_{km} = \alpha r = \left(\frac{3g}{2L}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3g}{4}$

Örnek m_1 ve m_2 kütlesi, eylemsizlik momenti I olan iki özdeş makara üzerinden geçen hafif bir iple birbirine bağlıdır. Her kütlenin ivmesi ile T_1, T_2, T_3 gerilmelerini bulunuz.



M, R

$I_{makara} = \frac{1}{2}MR^2$

$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$

$\tau = rF\sin 90$

$\boxed{a = \alpha R}$

① $m_1g - T_1 = m_1 a$

② $T_3 - m_2 g = m_2 a$

③ $T_1R - T_2R = I\alpha$

④ $T_2R - T_3R = I\alpha$

(3+4) $(T_1 - T_3)R = 2I\alpha$ ⑤

(1+2) $T_3 - T_1 - m_2g + m_1g = (m_1+m_2)a$

$T_3 - T_1 + (m_1-m_2)g = (m_1+m_2)a$

$T_1 - T_3 = (m_1-m_2)g - (m_1+m_2)a$ ⑥

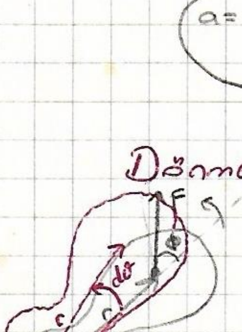
⑥ → ⑤ $[(m_1-m_2)g-(m_1+m_2)a]R = 2I\frac{a}{R}$

$a = \frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2+\frac{2I}{R^2}}$ 7

7 → 1
7 → 2
7 → 3

Dönme Hareketinde İş, Güç ve Enerji

güç



$\tau = rF\sin\varnothing$

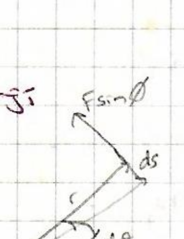
$dW = \vec{F}.\vec{ds} = (F\sin\varnothing)ds\underbrace{\cos\gamma}_{1}$

$= (F\sin\varnothing)ds$

$ds = rd\theta$

$= \underbrace{F\sin\varnothing\, r}_{\tau}d\theta$

$\underline{dW = \tau d\theta}$



$dW = \tau d\theta$

$\int dW = \int \tau d\theta$

$W = \int_{\theta_i}^{\theta_s} \tau d\theta \rightarrow$ İş

$dW = Fdx$

$P = \frac{dW}{dt} \qquad w = \frac{d\theta}{dt}$

$P = \vec{F}.\vec{v}$

$P = \frac{\tau d\theta}{dt} \rightarrow$ anlık güç

$\boxed{P = \tau w} \rightarrow$ Dönme hareketinde güç

İş ve Enerji

w → açısal hız
W → iş

$$\tau_{net} = \Sigma \tau = I\alpha = I\frac{dw}{dt} = I\frac{dw}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} \rightarrow w$$

$$\tau_{net} = I w \frac{dw}{d\theta}$$

$$W = \int(\Sigma\tau)\,d\theta = \int \tau_{net}\,d\theta = \int I w \frac{dw}{d\theta}\,d\theta = \int I w\,dw$$

$$W = I\int_{w_i}^{w_s} w\,dw = I\left(\tfrac{1}{2}w^2\right)\Big|_{w_i}^{w_s} \quad \underbrace{\tfrac{1}{2}Iw_s^2}_{K_{\Delta s}} - \underbrace{\tfrac{1}{2}Iw_i^2}_{K_{\Delta i}}$$

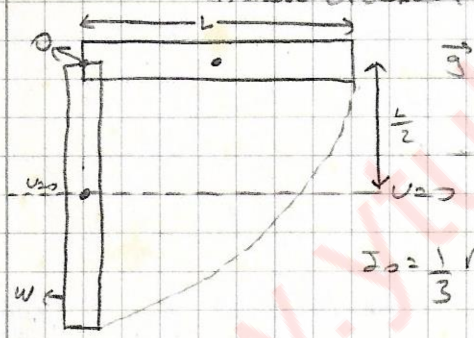
Dış torklar tarafından yapılan iş cismin dönme kinetik enerjisindeki değişime eşittir.

$$\boxed{W = \int \tau_{net}\,d\theta = K_{\Delta s} - K_{\Delta i} = \Delta K = \frac{1}{2}Iw_s^2 - \frac{1}{2}Iw_i^2}$$

iş - kinetik enerji teo

Örnek Boyu L, kütlesi M olan çubuk yatay durumda iken serbest bırakılıyor.

a) çubuk en düşük (düşey) durumda iken açısal hızı = ?



$\vec{g}\downarrow$

$$Mg\left(\frac{L}{2}\right) + K_{i_0} = \frac{1}{2}I_0 w^2 + U_{s_0}$$

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I w^2$$

$$I_0 = \frac{1}{3}ML^2$$

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)w^2$$

$$w = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

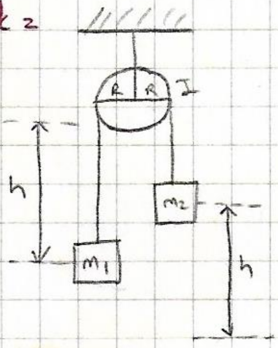
b) Çubuğun düşey konuma geldiği andaki kütle merkezinin ve en alt ucunun çizgisel hızını bulunuz.

$$v = w\cdot r$$

$$v_{km} = w\left(\frac{L}{2}\right) = \sqrt{\frac{3g}{L}}\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$v_{u} = w(L) = \sqrt{\frac{3g}{L}}\,(L)$$

Örnek 2



m_2 h kadar düştükten sonra kütlelerin çizgisel hızlarını ve bu anda makaranın açısal hızını bulunuz.

$$\Delta E = 0 = E_s - E_i \rightarrow E_s = E_i$$

$$E_i = -m_1 g h + m_2 g h + (K_{1i} + K_{2i} + K_{ki})$$

$$E_s = \frac{1}{2}m_1 v_s^2 + \frac{1}{2}m_2 v_s^2 + \frac{1}{2}I w_0^2 \ldots$$

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v_s^2 + m_1 g h - m_2 g h = 0$$

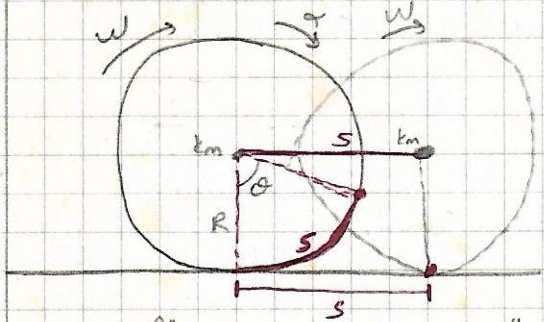
$$v_s = \left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)}\right]^{1/2}$$

KeskinColor

$$\boxed{w_s = \frac{v_s}{R}}$$

Yuvarlanma Hareketi ve Açısal Momentum

Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi



$s = R\theta$

$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \rightarrow w$

$\downarrow$

$v_{km} = Rw$

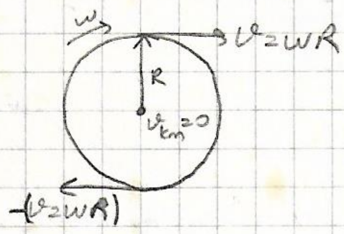
$s = R\theta$
$v_{km} = Rw$
$a_{km} = R\alpha$

$\frac{dv_{km}}{dt} = R\frac{dw}{dt}$

$\downarrow$

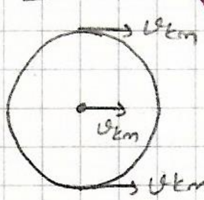
$a_{km} = R\alpha$

Dönme



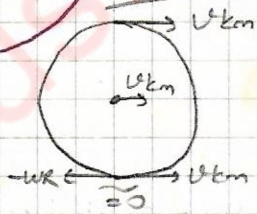
$+$

Öteleme



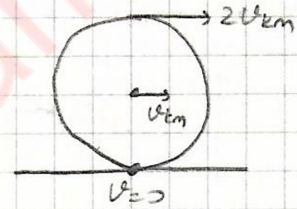
$=$

Yuvarlanma



$\frac{1}{2}Iw^2 + \frac{1}{2}Mv_{km}^2$

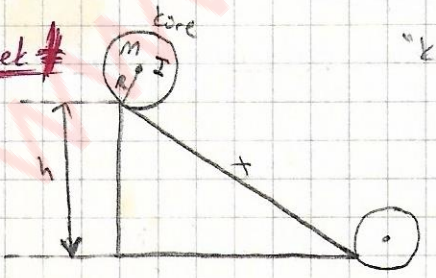
$v_{km} = wR$



$K_y = \frac{1}{2}Mv_{km}^2 + \frac{1}{2}I_{km}w^2$

$K_y = \frac{1}{2}Mv_{km}^2 + \frac{1}{2}I_{km}\left(\frac{v_{km}^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I_{km}}{R^2}\right)v_{km}^2$

Örnek #



$I = \frac{2}{5}MR^2$

"Kaymadan" kürenin kütle merkezinin eğik düzlemin en alt ucundaki hızını bulunuz. Kütle merkezinin çizgisel hızını bulunuz.

$Mgh + \underset{0}{K_{yi}} = \underset{0}{U_s} + K_{ys}$

$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{km}^2 + \frac{1}{2}Iw^2 \rightarrow v = wR$ idi

$Mgh = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)v_{km}^2$

$Mgh = \frac{1}{2}\left(M + \frac{2/5\,MR^2}{R^2}\right)v_{km}^2$

$v_{km} = \left(\frac{2gh}{1 + \frac{2/5\,MR^2}{MR^2}}\right)^{1/2} = \left(\frac{10}{7}gh\right)^{1/2}$

$v_{km}^2 = \frac{10}{7}gh \rightarrow v_{km}^2 = \frac{10}{7}g\underbrace{x\sin\theta}_{h}$

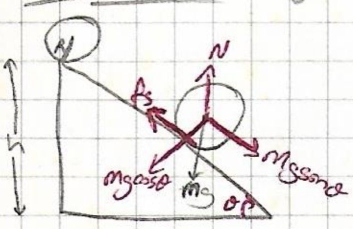
$v_s^2 = v_{km}^2 = 2ax = \frac{10}{7}gx\sin\theta$

$a_{km} = \frac{5}{7}g\sin\theta$

$v_s^2 = \cancelto{0}{v_i^2} + 2ax$

$v_{km}^2 = 2ax$

Dinamikten yuvarlanma için sürtünme kuvveti lazım.



$$\tau_{km} = f_s R = I_{km}\alpha$$
$$\alpha = \frac{a_{km}}{R}$$
$$f_s = I_{km} \cdot \frac{a_{km}}{R^2} = \left(\frac{2}{5} M\cancel{R^2}\right) \cdot \frac{a_{km}}{\cancel{R^2}} = \frac{2}{5} M a_{km} \quad (2)$$

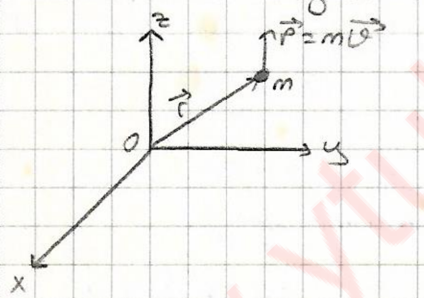
$$\Sigma F_x = Mg\sin\theta - f_s = M a_{km} \quad (1)$$
$$\Sigma F_y = n - Mg\cos\theta = 0$$

$$(2) \rightarrow (1) \quad Mg\sin\theta - \frac{2}{5} M a_{km} = M a_{km}$$

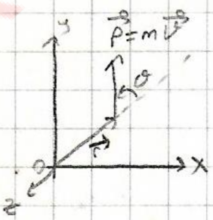
$$g\sin\theta = \frac{7}{5} a_{km} \rightarrow a_{km} = \frac{5}{7} g\sin\theta$$

Bir Parçacığın Açısal Momentumu

Tanım: O koordinat başlangıcına göre bir parçacığın açısal momentumu, o andaki $\vec{r}$ konum ve $\vec{P}$ çizgisel momentumunun vektörel çarpımıdır. Açısal momentum => $\vec{L}$ vektöreldir.



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$
$$L = r P \sin\theta$$

yön sağ el kuralı ile bulunur.

Bir Cisme Tork Uygulanır ise

$$\tau_{net} = \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{r} \times \vec{F}$$

net tork cismin yada sist. açısal momentumunu zamanla değiştirir.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\vec{\tau}_{net} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P})$$
$$= \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P}$$

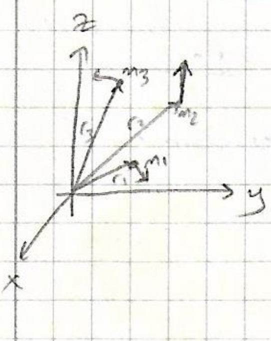
$$\vec{\tau}_{net} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P})$$

$$\boxed{\vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

$$\vec{\tau}_{net} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} + \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{net} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Parçacıklar Sisteminin Açısal Momentumu



$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 \qquad \vec{P}_1 = m_1\vec{v}_1$$
$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 \qquad \vec{P}_2 = m_2\vec{v}_2$$
$$\vdots$$

$$\vec{L}_{sist} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n$$
$$\vec{L}_{sist} = \sum_i \vec{L}_i$$

$$\Sigma \vec{\tau}_{dış} = \sum_i \frac{dL_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i L_i = \frac{dL_{sist}}{dt}$$ eylemsiz referans sist. göre

Açısal Momentumun Korunumu

$$\sum \tau_{dış} = \tau_{net} = \frac{dL}{dt}$$

$$0 = \frac{dL}{dt} \rightarrow L \text{ sbt.} \qquad \overset{t_i}{L_i} = \overset{t_s}{L_s} = L \qquad L_s - L_i = 0 \qquad \Delta L = 0$$

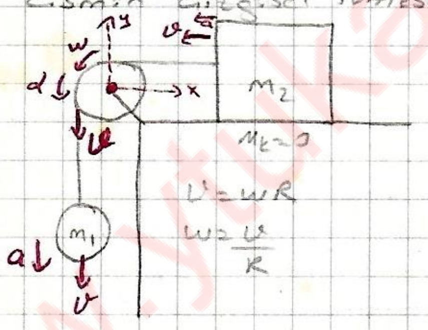
Korunum Yasaları

F korunumlu ise $\quad \Delta E = 0 \quad E_s - E_i = 0 \quad E_s = E_i \Rightarrow K_s + U_s = K_i + U_i$

$F_{dış} = 0 \quad \Delta P = 0 \quad P_s - P_i = 0 \quad P_s = P_i$

$\tau_{dış} = 0 \quad \Delta L = 0 \quad L_s - L_i = 0 \quad L_s = L_i$

Örnek: m_1 kütleli bir küre ile m_2 kütleli bir blok, şekilde gösterildiği gibi, R yarıçaplı bir makaradan geçen ince bir iple birbirine bağlıdır. Sürtünmeler ihmal ediliyor. Açısal momentum ve tork kavramlarını kullanarak, bu iki cismin çizgisel ivmesi için bir ifade elde ediniz.



$L_1 = m_1 v R \qquad \tau_{dış} = m_1 g R$

$L_2 = m_2 v R$

$L_{makara} = I w$

$$L_{sistem} = m_1 v R + m_2 v R + I \underbrace{w}_{\frac{v}{R}}$$

$$\frac{dL_{sist}}{dt} = \tau_{dış}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_1 v R + m_2 v R + I \frac{v}{R}\right) = m_1 g R$$

$$(m_1 + m_2) R \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a} + \frac{I}{R} \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a} = m_1 g R$$

$$(m_1 + m_2) a + \frac{I a}{R} = m_1 g R \rightarrow a = \frac{m_1 g}{(m_1 + m_2) + \frac{I}{R^2}}$$

Örnek 2

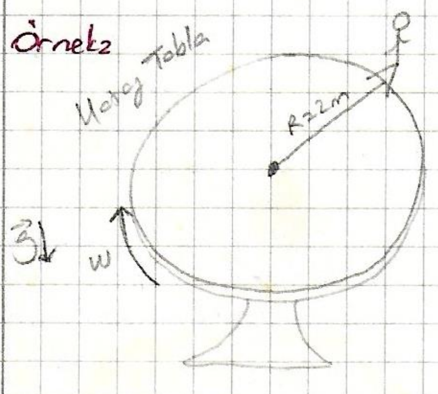


Tabla = $M = 100 kg$, $R = 2 m$

öğrenci = $m = 60 kg$

Öğrenci döner tablanın kenarında iken sistemin açısal hızı $w_i = 2$ rad/s. Öğrencinin merkezden $r = 0,5$ m uzaklıktaki bir noktaya ulaştığında sist. açısal hızı?

$$\tau_{dış} = 0 \qquad \frac{dL}{dt} = 0 \qquad \Delta L = 0 \qquad L_s = L_i$$

$$I_s w_s = I_i w_i$$

$$I_i = I_{platform} + I_{çocuk} = \frac{1}{2} M R^2 + m R^2$$

$$I_s = \frac{1}{2} M R^2 + m r^2$$

$$\left(\frac{1}{2} M R^2 + m r^2\right) w_s = \left(\frac{1}{2} M R^2 + m R^2\right) w_i$$

$$w_s = 4,1 \text{ rad/s}$$

c) Parçacığa etki eden $\vec{\tau}$ torku O-nokt. göre, birim vekt. cinsinden zamana bağlı olarak = ?

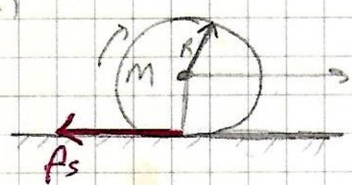
$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} \qquad \vec{F} = mg(-\hat{j}) = -20\hat{j}$$

$$\vec{\tau} = [5t\hat{i} + (45-5t^2)\hat{j}] \times [-20\hat{j}] \qquad \vec{\tau} = -100t\,\hat{k}$$

ya da $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(-50t^2-450)\hat{k} = -100t\,\hat{k}$

Ör2 M=12kg, R=0,1m yarıçaplı bir tel bobin (makara) sabit bir kuvvetin (F=48N) etkisinde şekillerdeki gibi sürtünmeli yatay bir düzlemde harekete başlıyor. Bobinin içi dolu bir silindir şeklinde olduğunu ve kaymadan yuvarlandığını varsayınız. Kaymayı engellemek için gerekli olan minimum statik sürtünme kuvveti = ?

a)



$$F - f_s = Ma_{km}$$

$$\tau_{km} = f_s R = I_{km}\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{a_{km}}{R}$$

$$f_s \cancel{R} = \frac{1}{2}M\cancel{R}\,a_{km}$$

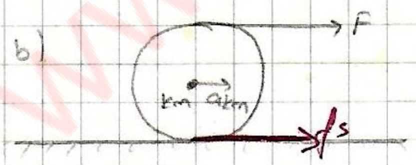
$$f_s = \frac{1}{2}Ma_{km} \rightarrow F - f_s \qquad F = 3f_s \qquad f_s = 16N$$

$$F - \frac{1}{2}Ma_{km} = Ma_{km} \rightarrow a_{km} = \frac{2F}{3M}$$

$$a_{km} = \frac{8}{3}\ m/s^2$$

$$\boxed{f_s = \frac{1}{2}Ma_{km} = 16N}$$

b)



$$F + f_s = Ma_{km}$$

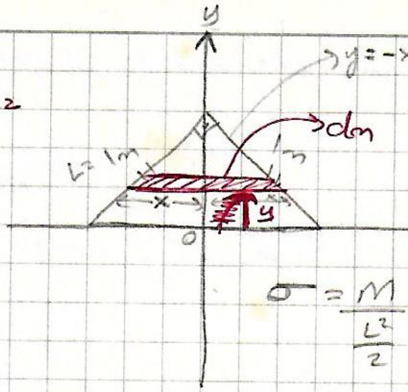
$$\tau_{km} = FR - f_s R = I_{km}\alpha$$

$$I_{km} = \frac{1}{2}MR^2 \qquad \alpha = \frac{a_{km}}{R}$$

$$F - f_s = \frac{1}{2}Ma_{km}$$

$$F + f_s = Ma_{km}$$
$$F - f_s = \frac{1}{2}Ma_{km}$$
$$a_{km} = \frac{16}{3}\ m/s^2$$
$$\boxed{f_s = 16N}$$

Örnek 2



$y=-x+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=-y+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$r_{km}=?$

$x_{km}=0$ simetri

$$y_{km}=\frac{1}{M}\int y\,dm=\frac{1}{M}\int y\,\sigma\,2x\,dy$$

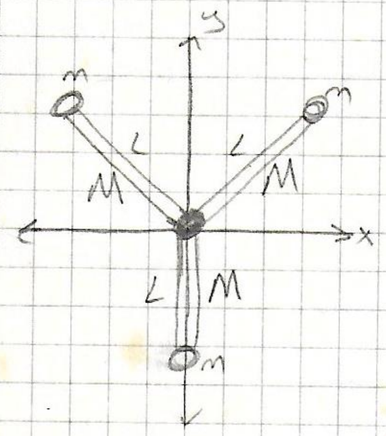
$$\sigma=\frac{M}{\frac{L^2}{2}}=\frac{2M}{\underbrace{L^2}_{1}}$$

$$y_{km}=\frac{2\sigma}{M}\int_0^{\sqrt{2}/2} y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-y\right)dy=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\sigma=\frac{dM}{dA}\qquad dm=\sigma\,\underbrace{dA}_{2x\,dy}$$

$$\vec{r}_{km}=x_{km}\hat{i}+y_{km}\hat{j}$$

$$\boxed{=0\hat{i}+\frac{\sqrt{2}}{6}\hat{j}}$$



$$I_z^{sist}=I_{m_{kütleler}}+I_{çubuklar}$$

→ çubuğun ucuna göre eylemsizliği

$$=(mL^2+mL^2+mL^2)+3\left(\frac{1}{3}ML^2\right)$$

$$I_z^{sist}=3mL^2+ML^2$$

b) $\theta(t)=t^2+2t+3$ radyan $t=3s$ $\alpha=?$ $K_0=?$

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=2t+2\Big|_{t=3}=8\ rad/s$$

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=2=2\ rad/s^2$$

$$K_0=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}(3mL^2+ML^2)(8)^2$$