

4. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = -e^t$
 $\frac{dy}{dt} + x - y = e^{2t}$ denklem sisteminin genel çözümünü determinant yöntemi ile bulunuz.

| YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Final Sınavı Soru ve Cevap Kâğıdı | | | NOT TABLOSU | | | | |
|--|---------------------------------|---------|--------------|-------|------------|-----|--------|
| | | | 1.S | 2.S | 3.S | 4.S | TOPLAM |
| Adı Soyadı | | | | | | | |
| Öğrenci Numarası | | Grup No | | | | | |
| Bölümü | | | Sınav Tarihi | | 25.08.2016 | | |
| Dersin Adı | MAT2411 Diferansiyel Denklemler | | Sınav Süresi | 90 dk | Sınav Yeri | | |
| Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı | Cevap Anahtarı | | | İmza | | | |
| YÖK nun 2547 sayılı Kanununun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar. | | | | | | | |

1. $ty'' + y' = 1, t > 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

I. yol $ty'' + ty' = t$

$$t = e^x$$

$$y' = e^{-x} Dy$$

$$y'' = e^{-2x} D(D-1)y$$

$$D(D-1)y + Dy = e^x$$

$$D^2 y = e^x \Rightarrow Dy = e^x + c_1 \Rightarrow y = e^x + c_1 x + c_2$$

$$r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$$

$$y = t + c_1 \ln t + c_2$$

II. yol $y' = p, y'' = \frac{dp}{dt}$

$$t \frac{dp}{dt} + p = 1 \Rightarrow t \frac{dp}{dt} = 1 - p \Rightarrow \frac{dp}{1-p} = \frac{dt}{t} \Rightarrow -\ln(1-p) = \ln t + \ln c_1$$

$$p = 1 - \frac{1}{c_1 t}$$

$$dy = \left[1 - \frac{1}{c_1 t} \right] dt$$

$$y = t - \frac{1}{c_1} \ln t + c_2$$

Veya: $p' + \frac{1}{t} p = \frac{1}{t}$ L.D.D

$$\lambda = e^{\int \frac{dt}{t}} = e^{\ln t} = t$$

$$p = \frac{1}{t} \left[\int \frac{1}{t} t dt + c_1 \right]$$

$$p = \frac{1}{t} [t + c_1] = 1 + \frac{c_1}{t}$$

$$dy = \int \left(1 + \frac{c_1}{t} \right) dt$$

$$y = t + c_1 \ln t + c_2$$

2. $y'' - 3y' + 2y = e^t$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü sabitlerin değişimi yöntemi ile bulunuz.

3. $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ diferansiyel denklemini Laplace yöntemi ile çözünüz.

4. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = -e^t$
 $\frac{dy}{dt} + x - y = e^{2t}$ denkleminin genel çözümünü determinant yöntemi ile bulunuz.

$$\begin{vmatrix} D & D-1 \\ 1 & D-1 \end{vmatrix} = D^2 - 2D + 1 \quad \text{①}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} -e^t & D-1 \\ e^{2t} & D-1 \end{vmatrix}}{D^2 - 2D + 1} \Rightarrow (D^2 - 2D + 1)X = \frac{-e^t + e^{2t} - 2e^{2t} + e^{2t}}{-e^{2t}}$$

$$(D^2 - 2D + 1)X = -e^{2t} \quad \text{②} \quad r^2 - 2r + 1 = 0 \quad (r-1)^2 = 0 \quad r_{1,2} = 1$$

$$X_h = c_1 e^t + c_2 t e^t \quad \text{③} \quad x_0 = A e^{2t} \quad x_0' = 2A e^{2t} \quad x_0'' = 4A e^{2t}$$

$$4A e^{2t} - 4A e^{2t} + A e^{2t} = -e^{2t} \Rightarrow A = -1 \Rightarrow x_0 = -e^{2t} \quad \text{④}$$

$$X = c_1 e^t + c_2 t e^t - e^{2t} \quad \text{⑤} \quad \Sigma \text{①}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} D & -e^t \\ 1 & e^{2t} \end{vmatrix}}{D^2 - 2D + 1} \Rightarrow (D^2 - 2D + 1)Y = 2e^{2t} + e^t$$

$$Y_h = c_3 e^t + c_4 t e^t \quad \text{⑥} \quad y_{01} = A e^{2t}; \quad y_{01}' = 2A e^{2t}; \quad y_{01}'' = 4A e^{2t} \quad \text{⑦}$$

$$4A e^{2t} - 4A e^{2t} + A e^{2t} = 2e^{2t} \Rightarrow A = 2 \Rightarrow y_{01} = 2e^{2t} \quad \text{⑧}$$

$$y_{02} = t^2 A e^t; \quad y_{02}' = 2t A e^t + t^2 A e^t; \quad y_{02}'' = 2A e^t + 2t A e^t + 2t A e^t + t^2 A e^t \quad \text{⑨}$$

$$t^2 A e^t + 4t A e^t + 2A e^t - 4t A e^t - 2t^2 A e^t + t^2 A e^t = e^t \Rightarrow A = \frac{1}{2} \quad \text{⑩}$$

$$y_{02} = \frac{t^2}{2} e^t \quad \text{⑪}$$

$$Y = c_3 e^t + c_4 t e^t + 2e^{2t} + \frac{t^2}{2} e^t \quad \text{⑫} \quad \Sigma \text{①}$$

$\Sigma \rightarrow$

Başarılar...

| YTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi | | NOT TABLOSU | | | | |
|--|---------------------------------|--------------|-------|------------|-----|--------|
| Final Sınavı Soru ve Cevap Kâğıdı | | 1.S | 2.S | 3.S | 4.S | TOPLAM |
| Adı Soyadı | | | | | | |
| Öğrenci Numarası | Grup No | | | | | |
| Bölümü | | Sınav Tarihi | | 25.08.2016 | | |
| Dersin Adı | MAT2411 Diferansiyel Denklemler | Sınav Süresi | 90 dk | Sınav Yeri | | |
| Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı | | İmza | | | | |
| YÖK nun 2547 sayılı Kanununun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar. | | | | | | |

1.

$$c_3 e^t + c_4 t e^t + c_3 e^t + c_4 t e^t + 2e^{2t} + \frac{t^2}{2} e^t + c_3 e^t + c_4 t e^t - e^{2t} - c_3 e^t - c_4 t e^t - 2e^{2t} - \frac{t^2}{2} e^t = 0$$

$$(c_3 + c_4) e^t + c_4 t e^t = -t e^t$$

$$c_3 + c_4 = 0$$

$$c_3 = -c_4$$

$$c_4 = -1$$

$$Y = c_3 e^t + c_4 t e^t + 2e^{2t} + \frac{t^2}{2} e^t$$

$$X = -c_4 e^t - t e^t e^{2t}$$

⑬

Başarılar...

2. $y'' - 3y' + 2y = e^t$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü sabitlerin değişimi yöntemi ile bulunuz.

3. $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ diferansiyel denklemini Laplace yöntemi ile çözünüz.

4. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = -e^t$
 $\frac{dy}{dt} + x - y = e^{2t}$ denklem sisteminin genel çözümünü determinant yöntemi ile bulunuz.

SORU
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = -e^t \\ \frac{dy}{dt} + x - y = e^{2t} \end{cases}$$

denklemler sisteminin determinant yöntemiyle çözünüz. (4)

$D = \frac{d}{dt}$

$$\rightarrow \begin{cases} Dx + (D-1)y = -e^t \\ x + (D-1)y = e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} D & D-1 \\ 1 & D-1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} -e^t & D-1 \\ e^{2t} & D-1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (D^2 - 2D + 1)x = -e^{2t}$$

$$\begin{vmatrix} D & D-1 \\ 1 & D-1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D & D-1 \\ 1 & D-1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (D^2 + 1)y = 2e^{2t} + e^t = 3e^{2t}$$

$(D^2 + 1)x = -e^{2t}$
 $\Rightarrow F_i \Rightarrow x_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

$(D^2 + 1)y = 3e^{2t}$
 $D = F_i \Rightarrow y_h = C_3 \cos t + C_4 \sin t$

$x_0 = A e^{2t}$
 $x_0' = 2A e^{2t}$ ve $x_0'' = 4A e^{2t}$
 $1A e^{2t} + A e^{2t} = -e^{2t}$
 $2A = -1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$y_0 = B e^{2t}$ $y_0' = 2B e^{2t}$ $y_0'' = 4B e^{2t}$
 $4B e^{2t} + B e^{2t} = 3e^{2t}$
 $5B = 3 \Rightarrow B = \frac{3}{5}$

$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{2} e^{2t}$

$y = C_3 \cos t + C_4 \sin t + \frac{3}{5} e^{2t}$

1. $ty'' + y' = 1, t > 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

SORU 1

$ty'' + y' = 1 \quad t > 0.$

$$\begin{cases} y' = p \\ y'' = p' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tp' + p = 1 \\ p' + \frac{1}{t}p = \frac{1}{t} \end{cases} \text{Linear Dif Denk.}$$

$$\frac{dp}{dt} + \frac{p}{t} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} + \frac{dt}{t} = 0$$

$\int \frac{dp}{p} + \int \frac{dt}{t} = \ln C$
 $\ln p + \ln t = \ln C$
 $Cp = \frac{C}{t} \quad C = C(t).$

$\odot p' = \frac{C'}{t} - \frac{C}{t^2}$ olur. Denkleme yerine yazarsak,

$$\frac{C'}{t} - \frac{C}{t^2} + \frac{1}{t} \frac{C}{t} = \frac{1}{t} \Rightarrow \begin{cases} C' = 1 \\ C = t + K_1 \end{cases}$$

$p = \frac{t + K_1}{t} = 1 + \frac{K_1}{t}$

$p = y'$ olduğundan $\odot \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{K_1}{t}$

$\odot y = t + K_1 \ln t + K_2$

2. $y'' - 3y' + 2y = e^t$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü sabitlerin değişimi yöntemi ile bulunuz.

SORU $y'' - 3y' + 2y = e^t$ dif. denklemini sabitlerin değişimi yöntemiyle çözünüz.

$$K(r) = r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_{1/2} = 2, 1$$

$$y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^t$$

$C_1 = C_1(t)$
 $C_2 = C_2(t)$ alalım.

$$\begin{cases} C_1' e^{2t} + C_2' e^t = 0 \\ 2C_1' e^{2t} + C_2' e^t = e^t \end{cases}$$

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^t \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2t} & e^t \\ 2e^{2t} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-e^t}{e^{2t} - 2e^{2t}} = e^{-t}$$

$$C_1 = -e^{-t} + K_1$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2t} & 0 \\ 2e^{2t} & 1 \end{vmatrix}}{-e^{2t}} = \frac{e^{2t}}{-e^{2t}} = -1$$

$$C_2 = -t + K_2$$

$$y_g = (-e^{-t} + K_1)e^{2t} + (-t + K_2)e^t$$

$$y_g = K_1 e^{2t} + K_2 e^t - e^t - t e^t$$

K_1 ve K_2 yoksadır.

Başarılar...

3. $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ diferansiyel denklemini Laplace yöntemi ile çözünüz.

SORU

$$y'' - y' - 6y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = -1$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) \\ \mathcal{L}\{y'\} = s Y(s) - y(0) \end{cases}$$

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) - s Y(s) + y(0) - 6 Y(s) = 0$$

$$s^2 Y(s) - s + 1 - s Y(s) + 1 - 6 Y(s) = 0$$

$$Y(s) \cdot (s^2 - s - 6) = s - 2$$

$$Y(s) = \frac{s-2}{s^2 - s - 6} = \frac{s-2}{(s-3)(s+2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{5} e^{3t} + \frac{4}{5} e^{-2t}$$

$$\frac{s-2}{(s-3)(s+2)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = \frac{4}{5}$$

Başarılar...