Ters Türev

Bir I aralığındaki her x için $F'(x) = f(x)$ ise I aralığındaki $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ in ters türevi denir.

☆ Eğer F, I aralığında f fonksiyonunun bir ters türevi ise f in I üzerindeki en genel ters türevi:

$F(x) + c$ dir. (c: keyfi sabit)

Örneğin:

Fonksiyon		Genel Ters Türevi
x^n	$\longrightarrow$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
$\sin kx$	$\longrightarrow$	$-\frac{\cos kx}{k} + c$
$\cos kx$	$\longrightarrow$	$\frac{\sin kx}{k} + c$
$\sec^2 kx$	$\longrightarrow$	$\frac{\tan kx}{k} + c$

Belirsiz İntegral:

$f(x)$ in tüm ters türevlerinin kümesine "$f(x)$ in x'e göre belirsiz integrali" denir.

$\int f(x)\,dx$ ile gösterilir.

İntegral Tablosu

① $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$, $\int k\,dx = kx + c \quad$ (k: bir sayı)

② $\int \mathrm{Cos}kx\,dx = \frac{\mathrm{Sin}kx}{k} + c$

③ $\int \mathrm{Sin}kx\,dx = -\frac{\mathrm{Cos}kx}{k} + c$

④ $\int \mathrm{Sec}^2 kx\,dx = \int (1+\mathrm{Tan}^2 kx)\,dx = \int \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 kx}\,dx = \frac{\mathrm{Tan}kx}{k} + c$

⑤ $\int \mathrm{Cosec}^2 kx\,dx = \int (1+\mathrm{Cot}^2 kx)\,dx = \int \frac{1}{\mathrm{Sin}^2 kx}\,dx = -\frac{\mathrm{Cot}kx}{k} + c$

⑥ $\int \mathrm{Tan}x\,dx = -\ln|\mathrm{Cos}x| + c$

⑦ $\int \mathrm{Cot}x\,dx = \ln|\mathrm{Sin}x| + c$

⑧ $\int \mathrm{Sec}x\,dx = \ln|\mathrm{Sec}x + \mathrm{Tan}x| + c$

⑨ $\int \mathrm{Cosec}x\,dx = -\ln|\mathrm{Cosec}x + \mathrm{Cot}x| + c$

⑩ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

⑪ $\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$

⑫ $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

⑬ $\int \mathrm{Sinh}x\,dx = \mathrm{Cosh}x + c$

⑭ $\int \mathrm{Cosh}x\,dx = \mathrm{Sinh}x + c$

⑮ $\int \mathrm{Sec}x \cdot \mathrm{Tan}x\,dx = \mathrm{Sec}x + c$

⑯ $\int \mathrm{Cosec}x \cdot \mathrm{Cot}x\,dx = -\mathrm{Cosec}x + c$

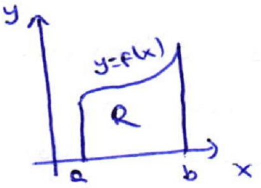
⑰ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\frac{x}{a} + c$

⑱ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\frac{x}{a} + c$

BELİRLİ İNTEGRAL

Riemann Toplamı

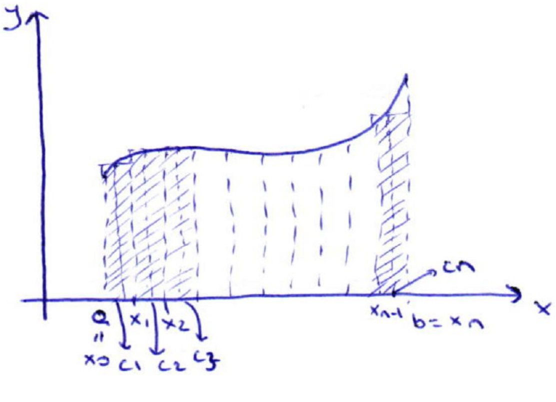
$y=f(x)$ sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere; f in grafiği altında, x-ekseninin üstünde, $x=a$ ve $x=b$ doğruları arasında kalan R bölgesinin alanını bulalım:



★ $[a,b]$ aralığını keyfi olarak $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$ noktaları ile keyfi n alt aralığa bölelim.

$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ kümesine $[a,b]$ nin bir bölüntüsü denir.

$[x_{i-1},x_i]$ $(1\le i\le n)$ alt aralıklarına da P bölümünün alt aralıkları denir. Her $[x_{i-1},x_i]$ alt aralığının uzunluğunu Δx_i ile gösterelim; yani $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ olsun. Bu alt aralıkların içinden birer keyfi c_i noktası seçelim:



$$
[a,b] \to
\left\{
\begin{array}{ccccc}
[x_0,x_1] & & [x_1,x_2] & \cdots & [x_{n-1},x_n] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{(uzunluk)} \\
\Delta x_1 & & \Delta x_2 & \cdots & \Delta x_n \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
c_1 & & c_2 & \cdots & c_n \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
f(c_1) & & f(c_2) & \cdots & f(c_n) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
f(c_1).\Delta x_1 & & f(c_2)\Delta x_2 & \cdots & \underbrace{f(c_n)}_{\text{küçük}}.\underbrace{\Delta x_n}_{\text{kısa kenar}}
\end{array}
\right.
$$

dikdörtgenin uzun kenarı

Bu durumda her bir dikdörtgenin alanı $f(c_i).\Delta x_i$ olur.

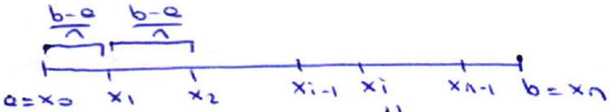
$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i$ toplamına "f fonksiyonu ve P bölüntüsü için Genel Riemann Toplamı" denir.

Alt aralıkların en büyüğü sıfıra gidecek şekilde alt aralıkların sayısını sınırsız arttırırsak ($n \to \infty$, $\Delta x_i \to 0$ için limit alırsak):

$$\boxed{R'\text{nin Alanı} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i} \quad \text{olur.}$$

★ R nin alanı [a,b] nin nasıl bölündüğü ve c_i'lerin nasıl seçildiğinden bağımsızdır. Dolayısıyla çeşitli P bölüntüleri ve c_i seçimine bağlı birçok Riemann Toplamı yazılabilir.

★ Eğer [a,b] yi eşit n parçaya böler ($\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ olur) ve c_i yi her aralığın:



$$\Downarrow$$

$$x_i = a + i.\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$x_{i-1} = a + (i-1).\frac{b-a}{n}$$

a) Sağ uç noktası alırsak:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f\Big(\underbrace{a + i.\frac{b-a}{n}}_{c_i}\Big) . \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x_i}$$

b) Sol uç noktası alırsak:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f\Big(\underbrace{a + (i-1).\frac{b-a}{n}}_{c_i}\Big) . \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x_i}$$

Riemann Toplamlarını elde ederiz.

Alt ve Üst Riemann Toplamları

$f(x)$ fonksiyonu ve P bölüntüsü için:

* Alt Riemann Toplamı: $L(f,P)$

Üst Riemann Toplamı: $U(f,P)$ ile gösterilir.

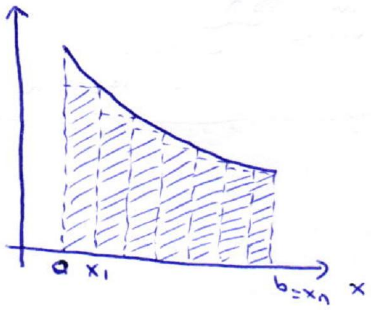
* l_i: her $[x_{i-1}, x_i]$ aralığının minimumu

u_i: " " " maksimumu olmak üzere:

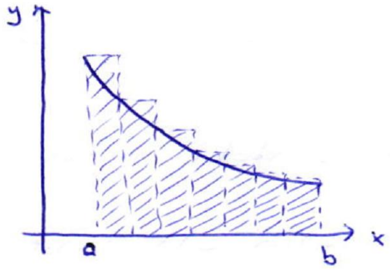
$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i).\Delta x_i = f(l_1).\Delta x_1 + \dots + f(l_n).\Delta x_n$$ ⇒ Aralığın min. noktaları baz alınır

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i).\Delta x_i = f(u_1).\Delta x_1 + \dots + f(u_n).\Delta x_n$$ ⇒ Aralığın max noktaları baz alınır

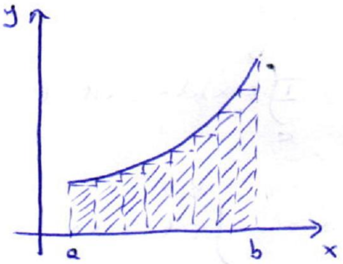
ile tanımlanır.



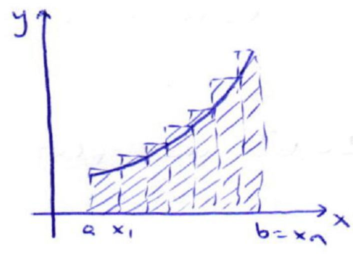
Azalan fonk. için Alt Riemann toplamında sağ uç noktalar baz alınır



Azalan fonk. için Üst Rie. Toplamında sol uç noktalar baz alınır



Artan fonk için Alt Riemann toplamında sol uç noktalar baz alınır



Artan fonk. için Üst Riemann Toplamında sağ uç noktalar baz alınır

Belirli integral

Eğer her seferinde birbirlerine daha yakın ve daha çok sayıda noktaya sahip P bölümleri için, $L(f,P)$ ve $U(f,P)$ toplamlarını hesaplarsak limit durumunda bu toplamlar ortak bir değere yakınsarlar; ki bu değer, $f(x) \geq 0$ ise : $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ ile sınırlı bölgenin alanıdır.

☆ Her P bölünmesi için, $L(f,P) \leq I \leq U(f,P)$ olacak şekilde bir tek I sayısı varsa f integre edilebilirdir.

Bu I sayısına "f in $[a,b]$ aralığındaki belirli integrali" denir.

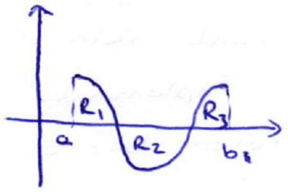
$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} L(f,P) = \lim_{n\to\infty} U(f,P) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{S_n}_{\text{Genel Rie. Toplam.}}}$$

☆ f in $[a,b]$ deki integrali bir sayıdır.

☆ a : integralin alt sınırı
b : integralin üst sınırı
dx : x in diferansiyeli (Riemann toplamındaki Δx yerine gelir)
x : integrasyon değişkenidir.

☆ $[a,b]$ nin tüm P bölümleri için $L(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f,P)$ dir.

☆ Eğer $[a,b]$ de $f(x) \leq 0$ ise R nin Alanı $= -\int_a^b f(x)dx$ dir.

☆ 

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = R_1 + R_3 - R_2$$

* Genel Riemann Toplamı ile Belirli İntegral:

a) $[a,b]$ eşit n parçaya bölünür ve c_i ler sağ uçtan seçilirse:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i.\frac{b-a}{n}\right).\frac{b-a}{n} \right\}$$ formülü ile hesaplanır.

b) $[a,b]$ eşit n parçaya bölünür ve c_i ler sol uçtan seçilirse:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f\left(a + (i-1).\frac{b-a}{n}\right).\frac{b-a}{n} \right\}$$ formülü ile hesaplanır.

Toplam formülleri

① $$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\dots+n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

② $$\sum_{i=1}^{n} a = a+a+\dots+a = a.n$$

③ $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1+2^2+\dots+n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$$

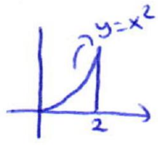
④ $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1+2^3+\dots+n^3 = \left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2$$

(*) $f(x)=x^2$ için $[0,2]$ aralığının bir bölüntüsünü

$P=\left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ alarak alt ve üst toplamları bulunuz.

$[0,2] \to \left[0,\frac{1}{2}\right]\ \left[\frac{1}{2},1\right]\ \left[1,\frac{3}{2}\right]\ \left[\frac{3}{2},2\right] \to 4$ Aralık

$\Delta x_k=\frac{1}{2} \quad (k=1,2,3,4)$



Fonksiyon artan. $[x_{k-1},x_k]$ aralığı için:

$u_k=x_k \to$ Aralığın maksimumu sağ uçta

$l_k=x_{k-1} \to$ " minimumu sol uçta

$\left[0,\frac{1}{2}\right]$: $u_1=\frac{1}{2} \to f(u_1)=\frac{1}{4}$, $l_1=0 \to f(l_1)=0$

$\left[\frac{1}{2},1\right]$: $u_2=1 \quad f(u_2)=1$, $l_2=\frac{1}{2} \quad f(l_2)=\frac{1}{4}$

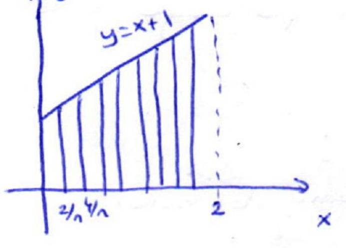
$\left[1,\frac{3}{2}\right]$: $u_3=\frac{3}{2} \quad f(u_3)=\frac{9}{4}$, $l_3=1 \quad f(l_3)=1$

$\left[\frac{3}{2},2\right]$: $u_4=2 \quad f(u_4)=4$, $l_4=\frac{3}{2} \quad f(l_4)=\frac{9}{4}$

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{4} f(l_i).\Delta x_i=\frac{1}{2}.0+\frac{1}{2}.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.1+\frac{1}{2}.\frac{9}{4}=\frac{14}{8} \to \text{Alt Toplam}$$

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{4} f(u_i).\Delta x_i=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.1+\frac{1}{2}.\frac{9}{4}+\frac{1}{2}.4=\frac{30}{8} \to \text{Üst Toplam}$$

(*) $y=x+1$ doğrusu altında, x-ekseninin üstünde, $x=0$ ve $x=2$ arasında kalan bölgenin alanını üst Riemann toplamı ile bulunuz.



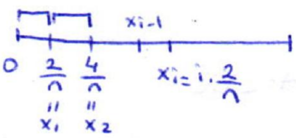
I. Yol

$[0;2]$ aralığını eşit n parçaya bölelim.

Bu durumda her bir aralığın uzunluğu

$\Delta x_i=\frac{2}{n} \quad (i=1,\dots,n)$ olur.

$[x_{i-1}, x_i]$ temel aralığının maksimumu, fonk. artan olduğu için, sağ uç olan x_i noktasında olur.



$$x_i = \frac{2i}{n} \rightarrow f(x_i) = f\left(\frac{2i}{n}\right) = \frac{2i}{n} + 1$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(\frac{2i}{n}+1\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n^2}.i + \frac{2}{n} = \frac{4}{n^2}.\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2}{n}.n$$

$$= 2.\frac{(n+1)}{n} + 2$$

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n} + 2 = \underline{\underline{4}}$$

II. Yol

$y = x^2+1$ $[0,2]$ aralığında artandır. Her bir aralığın maksimumu sağ uçta olur.

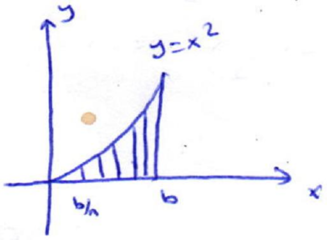
$[0,2]$ aralığını eşit n parçaya böler ve sağ uç formülü kullanılırsa:

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{2-0}{n} . \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right) \right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} . \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}+1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[\frac{2}{n}.\frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$

$$= \underline{\underline{4}}$$

⊛ $y = x^2$ parabolü, $y=0$, $x=0$, $x=b$ arasındaki bölgenin alanını Riemann toplamları ile bulunuz.



$[0,b]$ aralığını eşit n parçaya bölelim.

$\Delta x_i = \frac{b}{n}$ $(i=1,..,n)$ olur.

Alanı üst Riemann toplamı ile bulalım.

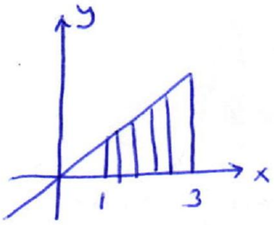
$[x_{i-1}, x_i]$ aralığı için maksimum sağ uç olan x_i de olur.

$x_i = \frac{b}{n} i \rightarrow f(x_i) = \left(\frac{b i}{n}\right) = \frac{b^2}{n^2} i^2$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) . \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{b^2}{n^2} i^2 . \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{b^3}{n^3} . \frac{n(n+1).(2n+1)}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P) = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} . \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \underline{\underline{\frac{b^3}{3}}}$$

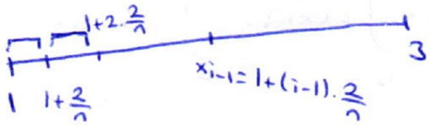
(*) $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$ arasında kalan bölgenin alanını alt Riemann toplamı ile bulunuz.



$[1,3]$ aralığını eşit n parçaya bölersek her bir aralığın uzunluğu $\Delta x_i = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$ $(i = 1, \dots, n)$ olur.

$y = x$ artan fonk. olduğundan her bir aralığın minimumu sol uçta olur.

$[x_{i-1}, x_i]$ için $l_i = x_{i-1}$ dir.



$x_{i-1} = 1+(i-1).\frac{2}{n} \rightarrow f(x_{i-1}) = 1+(i-1).\frac{2}{n}$

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i) . \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) . \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left[1+(i-1).\frac{2}{n}\right]$$

$$= \frac{2}{n} . n + \frac{4}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} - n\right] = 2 + 2 . \frac{n^2-n}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P) = \lim_{n\to\infty}\left(2 + 2 . \frac{n^2-n}{n^2}\right) = \underline{4}$$

Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri :

Eğer f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ise f in $[a,b]$ üzerindeki ortalama değeri:

$$ort(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{dir.}$$

Belirli İntegralin Özellikleri :

① $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

② $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

③ $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ $\qquad \int_a^b (f(x) \mp g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \mp \int_a^b g(x)\,dx$

④ $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

⑤ $[a,b]$ de $f(x) \geq g(x)$ ise $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

$[a,b]$ de $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

☆

⑥ Eğer maxf ve minf , f in $[a,b]$ deki max ve min değerleri ise:

$$\min f.(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \max f.(b-a)$$

dır. Bu özelliğe Max-Min Eşitsizliği denir.

(*) Belirli integralin özelliklerini kullanarak $\int_0^1 \sqrt{1+\cos^3 x}\, dx$ integralinin değerinin $\sqrt{2}$ ye eşit veya daha küçük olduğunu gösteriniz.

$\sqrt{1+\cos^3 x}$ in $[0,1]$ aralığındaki maksimum değeri $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ dir. Belirli integralin max-min eşitsizliği özelliğine göre

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos^3 x}\, dx \le \underbrace{\max f}_{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{(1-0)}_{1} \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1+\cos^3 x}\, dx \le \sqrt{2} \text{ dir.}$$

Belirli İntegraller için Ortalama Değer Teoremi

Eğer f, $[a,b]$ de sürekli ise $[a,b]$ aralığındaki bir c noktasında aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(*) Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli ve $\int_a^b f(x)dx = 0$ ise $[a,b]$ aralığında en az bir kez $f(x)=0$ olacağını gösteriniz.

$[a,b]$ de f in ortalama değeri:

$$\text{ort}(f) = \frac{1}{b-a} \cdot \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{0} = 0$$

Ortalama değer teoremine göre f bu değeri bir $c \in [a,b]$ aralığında alır. Dolayısıyla en az bir $c \in [a,b]$ için $f(c)=0$ dır.

İntegral Hesabın Temel Teoremi

I. Kısım: Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ise bu durumda $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ de $[a,b]$ üzerinde süreklidir, (a,b) de türevlenebilirdir ve türevi $f(x)$ dir:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Leibnitz Kuralı (İntegral İşareti Altında Türev)

f sürekli ve $u(x)$ ile $v(x)$ türevlenebilen fonksiyonlar ise:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right] = f(v(x)).v'(x) - f(u(x)).u'(x) \text{ dir.}$$

⊛ $f(x) = \int_x^3 e^{-t^2}dt \Rightarrow f'(x) = ?$

$$f'(x) = e^{-3^2}.(3)' - e^{-x^2}.1 = -e^{-x^2}$$

⊛ $G(x) = x^2 \int_0^{5x} e^{-t^2}dt \Rightarrow G'(0) = ?$

$$G'(x) = 2x.\int_0^{5x} e^{-t^2}dt + x^2\left[5.e^{-(5x)^2} - 0\right]$$

$$G'(0) = 0$$

⊛ $f(x) = \int_x^{x+3} t.(5-t)\,dt$ integralini maksimum yapan x değeri?

$f'(x) = 1.(x+3).(5-(x+3)) - x.(5-x) = 0$

$= 6 - 6x = 0 \Rightarrow x = 1$ K.N

$f''(x) = -6 < 0$ $x=1$ max. yapan x

⊛ $f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \frac{1}{1-t^2}dt \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$

$$f'(x) = \cos x.\frac{1}{\underbrace{1-\sin^2 x}_{\cos^2 x}} + \sin x.\frac{1}{\underbrace{1-\cos^2 x}_{\sin^2 x}}$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

II. Kısım (Hesaplama Teoremi)

Eğer f, $[a,b]$ deki her noktada sürekli ve F, f in $[a,b]$ deki herhangi bir ters türevi ise:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ dır.}$$