Alan Hesabı

① $[a,b]$ aralığında $f(x)\geq 0$ olmak üzere; $\int_a^b f(x)dx$ integrali: f'in grafiği, x-ekseni, $x=a$ ve $x=b$ doğruları arasındaki alanı verir.

(*) $y=\left(2+\sin\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \cos\frac{x}{2}$, x-ekseni, $x=0$, $x=\pi$ arasında kalan alanı bulunuz.

$0\leq x\leq \pi$ için $y\geq 0$ dır. Dolayısıyla alan:

$$A=\int_0^{\pi}\left(2+\sin\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \cos\frac{x}{2}\,dx$$

$2+\sin\frac{x}{2}=u$ $\qquad x=0\rightarrow u=2$

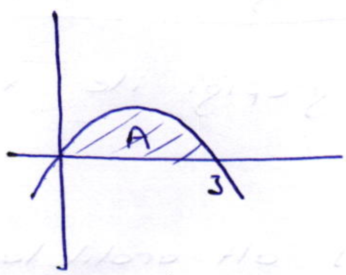
$\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=du$ $\qquad x=\pi\rightarrow u=3$

$$=\int_2^3 2u^2du=\frac{2u^3}{3}\Big|_2^3=\frac{2}{3}(27-8)=\frac{38}{3}$$

(*) x-ekseni üzerinde, $y=3x-x^2$ eğrisi altında kalan bölgenin alanı?

$y=3x-x^2 \rightarrow$ Kolları aşağı

x-eksenini kesim noktaları $y=3x-x^2=0 \rightarrow x=0$, $x=3$



$$A=\int_0^3(3x-x^2)dx=\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^3$$

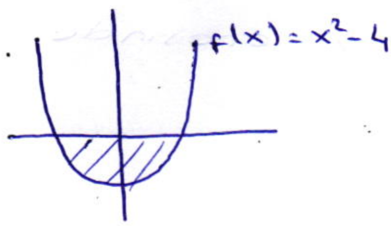
$$=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}=\frac{9}{2}$$

② Toplam Alan:

$f(x) = x^2 - 4$ ve $g(x) = 4 - x^2$ olsun.

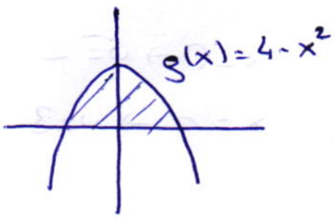
a) f ve g nin $[-2,2]$ deki belirli integrallerini

b) $[-2,2]$ arasında grafikleri ve x-ekseni arasındaki alanları hesaplayınız.



a) $I = \int_{-2}^{2} (x^2-4)\,dx = \frac{x^3}{3} - 4x \Big|_{-2}^{2} = -\frac{32}{3}$

b) $A = |I| = \left| \int_{-2}^{2} (x^2-4)\,dx \right| = \frac{32}{3}$



a) $I = \int_{-2}^{2} (4-x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$

b) $A = \int_{-2}^{2} (4-x^2)\,dx = \frac{32}{3}$

☆ $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını hesaplarken; fonksiyon hem pozitif hem de negatif değerler alıyorsa, $[a,b]$ aralığını fonksiyonun işaret değiştirmediği alt aralıklara ayırmalıyız. Toplam alan; $f(x)$ in işaret değiştirmediği her alt aralık üzerindeki belirli integralinin mutlak değerleri toplamıdır.

ÖZET: $[a,b]$ üzerinde $y=f(x)$ in grafiği ile x-ekseni arasında kalan alanı hesaplarken:

① f in sıfır olduğu yerlerde $[a,b]$ alt aralıklara bölünür

② Her alt aralıkta f in integrali hesaplanır

③ integrallerin mutlak değerleri toplanır

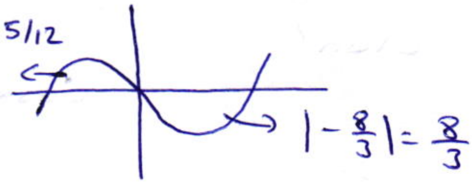
(*) $-1 \le x \le 2$ için $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ in grafiği ile x-ekseni arasındaki bölgenin alanı?

① f in sıfırları: $f(x) = x(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2,\ x = -1 \in [-1,2]$

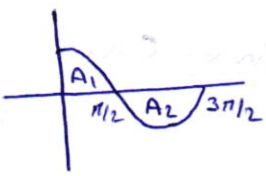
$[-1,0] \Rightarrow [-1,0]\ ,\ [0,2]$

② $\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \Big|_{-1}^{0} = \frac{5}{12}$ $\qquad \int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = -\frac{8}{3}$

③ $A = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}$



(*) $y = \cos x$, $x = 0$, $y = 0$, $x = \frac{3\pi}{2}$ arasındaki alan?



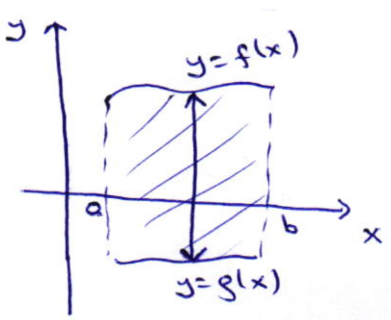
$A_1 = \int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x \Big|_{0}^{\pi/2} = 1$

$I_2 = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x\,dx = \sin x \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -1 - 1 = -2 \Rightarrow A_2 = |-2| = 2$

$A = A_1 + A_2 \Rightarrow A = 1 + 2 = 3$

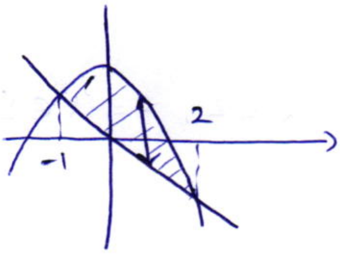
③ İki Eğri Arasındaki Alan

Eğer f ve g, $[a,b]$ de $f(x) \ge g(x)$ (f, g pozitif olmak zorunda değil) olmak üzere sürekli ise bu durumda $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ arasında kalan alan:



$$A = \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))\,dx$$

⊛ $y=2-x^2$, ve $y=-x$ ile çevrili bölgenin alanı?

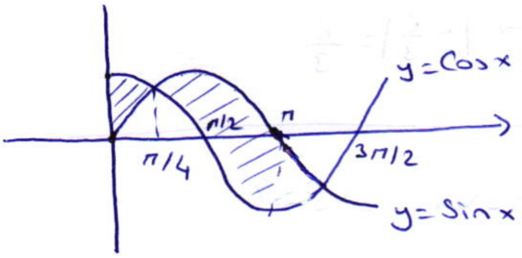


$$\left.\begin{array}{l} y=2-x^2 \\ y=-x \end{array}\right\} \quad 2-x^2=-x \Rightarrow x^2-x-2=0$$

$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right\}$ de kesişirler

$$A=\int_{-1}^{2}(2-x^2-(-x))\,dx = 2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

⊛ $x=0$ dan, $x=\pi$ ye : $y=\sin x$ ve $y=\cos x$ eğrileri arasındaki toplam alan?



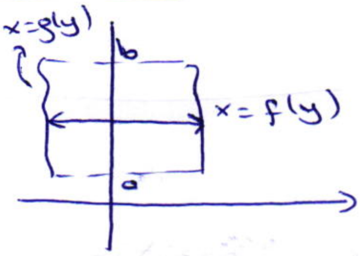
$$\cos x=\sin x \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$$

$$A=\int_{0}^{\pi/4}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\pi/4}^{\pi}(\sin x-\cos x)\,dx$$

$$=\sin x+\cos x\Big|_{0}^{\pi/4}+(-\sin x-\cos x)\Big|_{\pi/4}^{\pi}$$

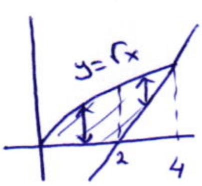
$$=\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}-1+\left(1+\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\right)=2\sqrt2$$

<u>y'ye göre integral</u>



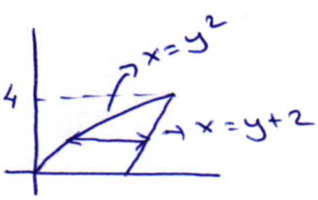
$$A=\int_{a}^{b}(f(y)-g(y))\,dy$$

⊛ 1. Bölgede, üstten $y=\sqrt{x}$, alttan x-ekseni ve $y=x-2$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanı?



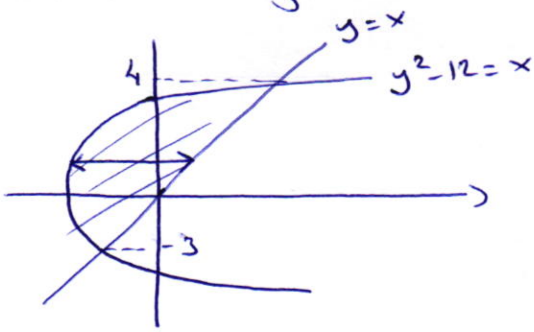
x'e göre integral : $A=\int_{0}^{2}\sqrt{x}\,dx+\int_{2}^{4}(\sqrt{x}-(x-2))\,dx=\frac{10}{3}$

y'ye göre integral :



$$A=\int_{0}^{4}(y+2-y^2)\,dy=\frac{10}{3}$$

(*) $x=y^2-12$ eğrisinin sağında, $y=x$ doğrusunun solunda kalan bölgenin alanı?



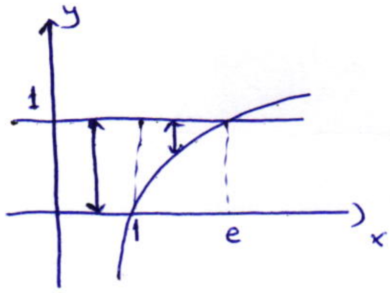
$y^2-12=y \Rightarrow y^2-y-12=0 \rightarrow y=-3$
$y=4$

$$A=\int_{-3}^{4}(y-y^2+12)\,dy=\frac{343}{6}$$

(*) $y=\ln x$ eğrisi ve $x=0$, $y=0$, $y=1$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını veren integrali:

a) x'e göre integral ile

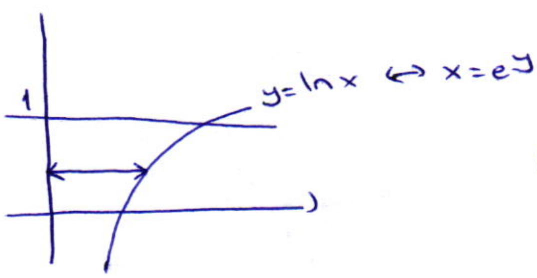
b) y'ye göre integral ile yazınız.



a) x'e göre

$$A=\int_0^1 1\,dx+\int_1^e(1-\ln x)\,dx$$

$$=1+(x-x\ln x+x)\Big|_1^e=e-1$$



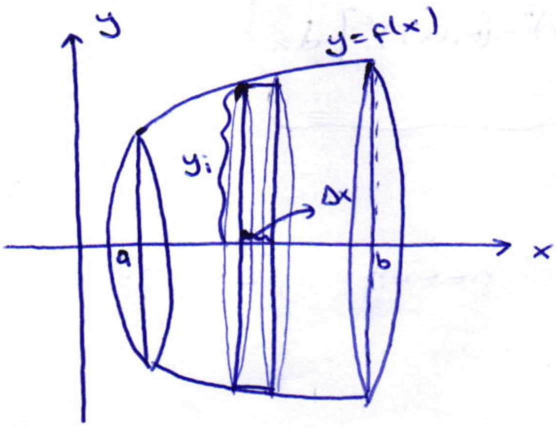
$$A=\int_0^1 e^y\,dy=e^y\Big|_0^1=e-1$$

DÖNEL YÜZEYLERİN SINIRLADIKLARI HACİMLERİN HESABI

1) Düzlemsel Dilimler:

a) Disk Yöntemi:

$y=f(x)$ eğrisi ile $x=a$, $x=b$ doğruları ve x-ekseninin sınırladığı düzlem şeklin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini hesaplamak isteyelim.



Bunun için düzlem şekli n dikdörtgene bölelim. Bu dikdörtgenler dönme esnasında dik silindirler meydana getirirler. Bu silindirlerin hacimlerinin toplamının limiti aranan hacmi verir.

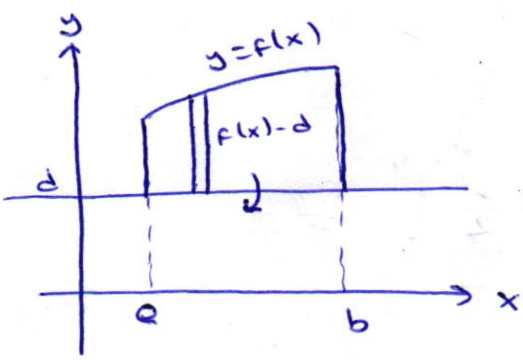
$\Delta V_i = \pi (y_i)^2 \Delta x$

silindirin yarıçapı — yükseklik

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi (y_i)^2 \Delta x$$

$$= \int_a^b \pi y^2 \, dx \Rightarrow \boxed{V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx}$$

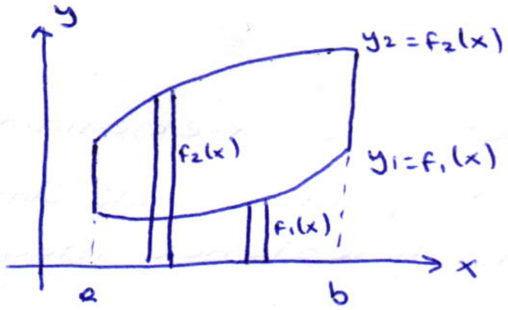
✩ $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=d$ bölgesi $y=d$ etrafında çevrilirse hacim:



$$\boxed{V = \pi \int_a^b (f(x)-d)^2 \, dx}$$

b) Pul Yöntemi:

* $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$, $x=a$, $x=b$ bölgesi x-ekseni etrafında çevrilirse hacim:

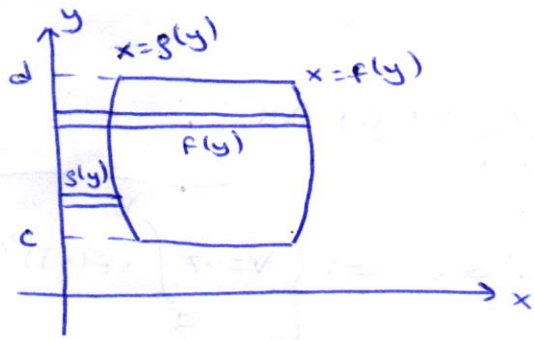


$$V = V_b - V_k$$

$$= \pi \int_a^b (f_2(x))^2\,dx - \pi \int_a^b (f_1(x))^2\,dx$$

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left[(f_2(x))^2 - (f_1(x))^2\right] dx}$$

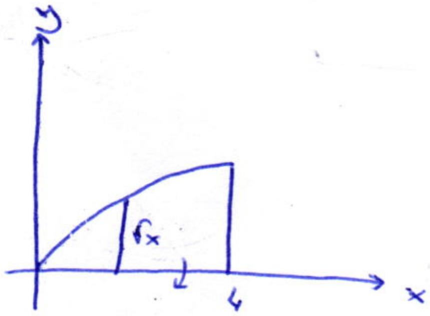
* $x=g(y)$, $x=f(y)$, $y=c$, $y=d$ arasındaki hacim y-ekseni etrafında çevrilirse hacim:



$$V = V_b - V_k = \pi \int_c^d (f(y))^2\,dy - \pi \int_c^d (g(y))^2\,dy$$

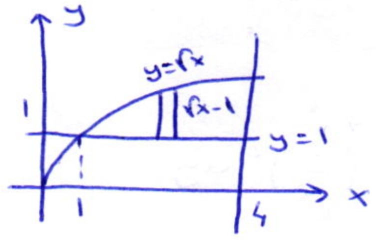
$$\boxed{V = \pi \int_c^d \left[(f(y))^2 - (g(y))^2\right] dy}$$

⊗ $y=\sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$ ve $y=0$ arasındaki bölge x-ekseni etrafında çevrilirse hacim?



$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2\,dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = \underline{\underline{8\pi}}$$

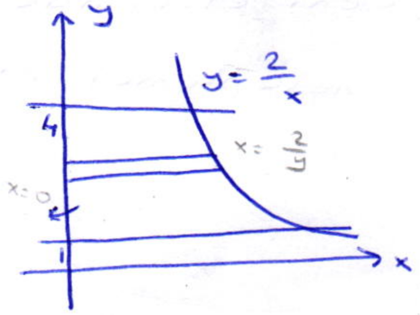
⊛ $y=\sqrt{x}$, $y=1$, $x=4$ arasındaki bölge $y=1$ etrafında çevrilirse hacim?



$$V=\pi\int_1^4(\sqrt{x}-1)^2\,dx=\pi\int_1^4(x-2\sqrt{x}-1)\,dx$$

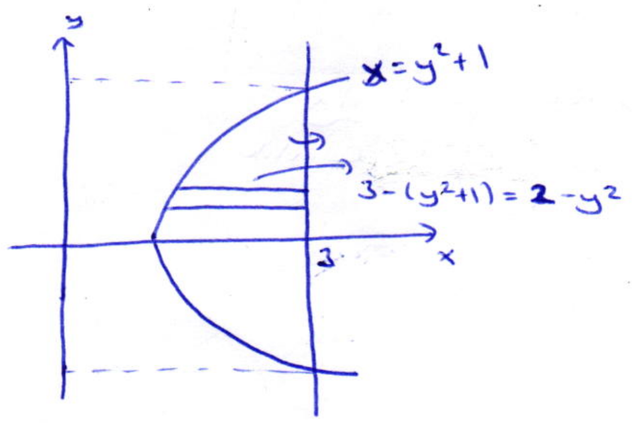
$$=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x^{3/2}-x\Big|_1^4\right)=\frac{7\pi}{6}$$

⊛ y-ekseni, $x=\frac{2}{y}$, $1\le y\le 4$ arasındaki bölge y-ekseni etrafında çevrilirse hacim?



$$V=\pi\int_1^4\left(\frac{2}{y}\right)^2dy=4\pi\left[-\frac{1}{y}\Big|_1^4\right]=3\pi$$

⊛ $x=y^2+1$, $x=3$ arasındaki bölge $x=3$ etrafında çevrilirse hacim?

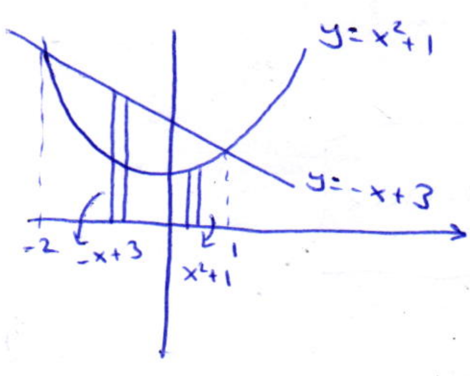


$$y^2+1=3 \Rightarrow y^2=2 \Rightarrow y=\mp\sqrt{2}$$

$$V=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(2-y^2)^2\,dy=\frac{64\sqrt{2}}{15}\pi$$

⊛ $y=x^2+1$, $y=-x+3$ arasındaki bölge x-ekseni etrafında çevrilirse hacim?

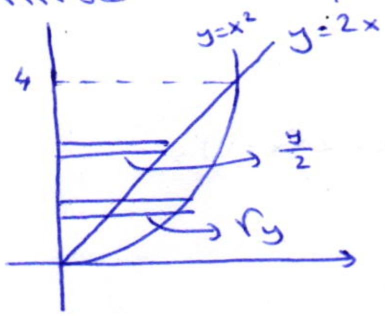
$$x^2+1=-x+3 \Rightarrow x^2+x-2=0 \quad x=1 \quad x=-2$$



$$V=V_b-V_k=\pi\int_{-2}^{1}(-x+3)^2\,dx-\pi\int_{-2}^{1}(x^2+1)^2\,dx$$

$$=\frac{117}{5}\pi$$

※ $y=x^2$, $y=2x$ arasındaki bölge y-ekseni etrafında çevrilirse hacim?



$x^2=2x \rightarrow x=0 \quad x=2$

$$V=V_b-V_k$$

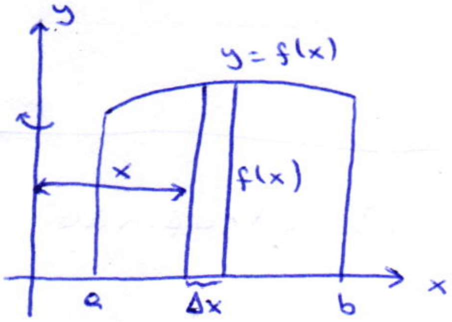
$$=\pi\int_0^4(\sqrt{y})^2dy-\pi\int_0^4\left(\frac{y}{2}\right)^2dy$$

$$=\frac{8}{3}\pi$$

---

② Silindirik Kabuklar (Kabuk Yöntemi):

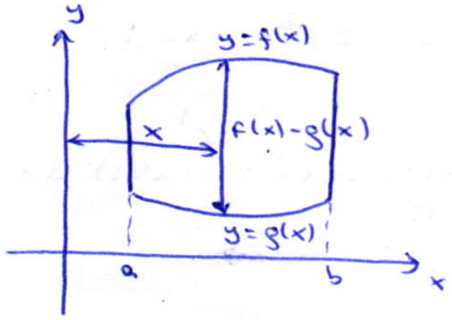
☆ $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini hesaplamak isteyelim.



$$V=2\pi\int_a^b \underbrace{(\text{Kabuk Yarıçapı})}_{\text{dönme eksenine olan uzaklık}}.(\text{Kabuk Yüksekliği})\underbrace{dx}_{\text{kalınlık}}$$

$$\boxed{V=2\pi\int_a^b x.f(x)\,dx}$$

☆ $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ bölgesi y-ekseni etrafıyda çevrilirse:



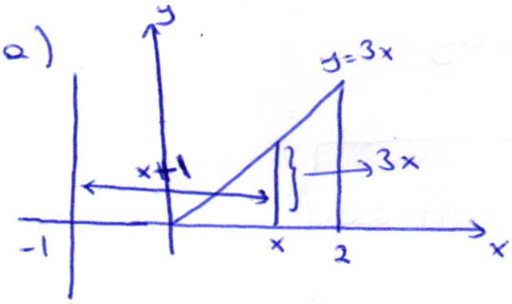
$$V=2\pi\int_a^b (K.Y.)(K.Y)dx$$

$$\boxed{V=2\pi\int_a^b x.(f(x)-g(x))dx}$$

⊛ $y=3x,\ y=0,\ x=2$ bölgesinin $x=-1$ etrafında çevrilmesi ile oluşan hacmi

a) Kabuk yöntemi b) Pul yöntemi ile hesaplayın.

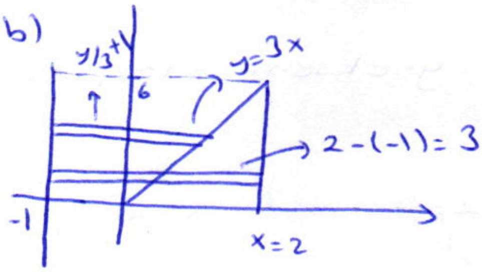
a)



$$V = 2\pi \int_0^2 (K.Y)(K.Y)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (x+1).3x\,dx = \underline{28\pi}$$

b)



$$V = V_b - V_k$$

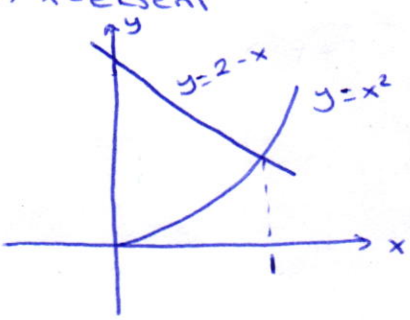
$$V = \pi \int_0^6 3^2\,dy - \pi \int_0^6 \left(\frac{y}{3}+1\right)^2 dy = 28\pi$$

⊛ $y=x^2,\ y=2-x,\ x \geq 0$ bölgesinin:

a) Alanı

b) $x=2$ etrafında çevrilmesiyle oluşan hacim?

b) x-ekseni " " " ?



a) $$A = \int_0^1 (2-x-x^2)\,dx$$

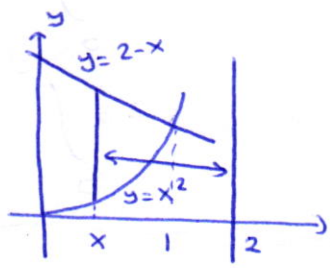
$x^2 = 2-x$

$x^2+x-2=0$

$x=1$

$x=-2$

b)



$$V = 2\pi \int_0^1 (K.Y)(K.Y)\,dx$$

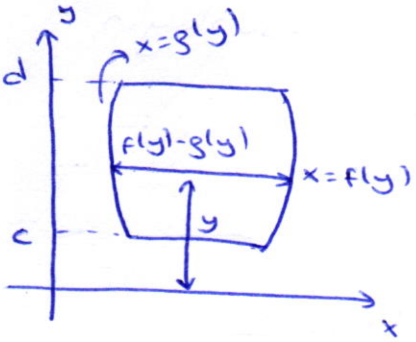
$$= 2\pi \int_0^1 (2-x).(2-x-x^2)\,dx$$

c)

$$V = V_b - V_k$$

$$V = \pi \int_0^1 \left((2-x)^2 - (x^2)^2\right) dx$$

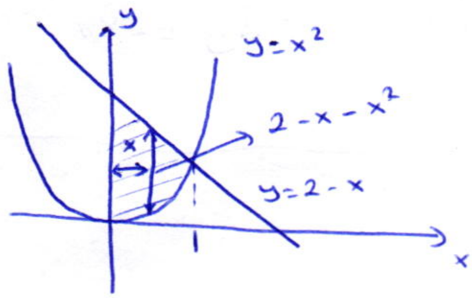
★ $x=f(y)$, $x=g(y)$, $y=c$, $y=d$ bölgesi x-ekseni etrafında çevrilirse:



$$V=2\pi\int_c^d (\text{k.y.})(\text{k.y.})\,dy$$

$$\boxed{V=2\pi\int_c^d y\cdot(f(y)-g(y))\,dy}$$

⊛ $y=x^2$, $y=2-x$, $x=0$, $x\geq 0$ bölgesinin y-ekseni etrafında çevrilmesiyle oluşan hacim?

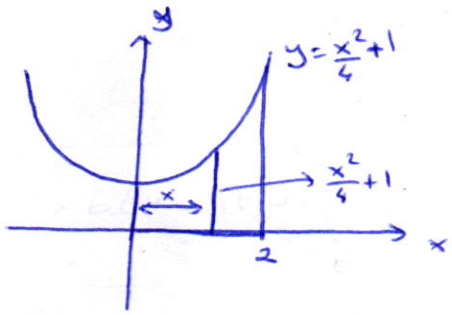


$x^2=2-x \Rightarrow x^2+x-2=0 \quad x=1 \quad x=-2$

$$V=2\pi\int_0^1 (\text{k.y.})(\text{k.y})\,dx$$

$$=2\pi\int_0^1 x\cdot(2-x-x^2)\,dx=\frac{5\pi}{6}$$

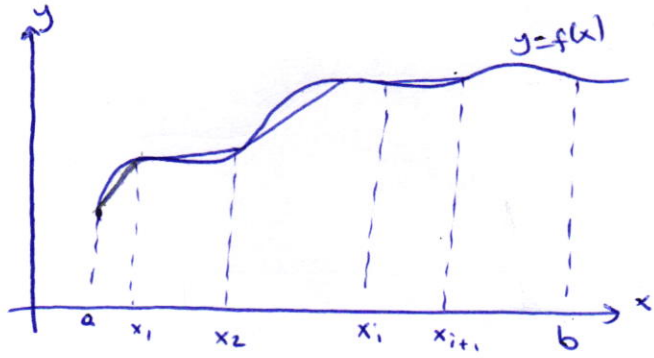
⊛ $y=1+\frac{x^2}{4}$, $x=2$, $x=0$, $y=0 \Rightarrow$ y-ekseni etrafında çevir



$$V=2\pi\int_0^2 (\text{k.y})(\text{k.y})\,dx$$

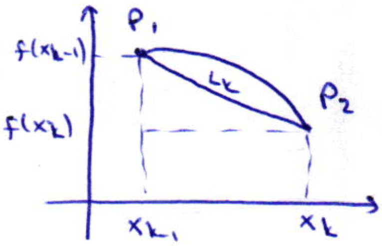
$$=2\pi\int_0^2 x\cdot\left(\frac{x^2}{4}+1\right)dx=6\pi$$

Yay Uzunluğu



$y=f(x)$ eğrisinin $a \le x \le b$ aralığındaki uzunluğunu hesaplamak isteyelim.

$[a,b]$ aralığını n alt aralığa bölelim.



$$L_k = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

$\Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$

O.D.T. göre $\Delta y_k = f'(c_k).\Delta x_k$ o.s. bir $c \in (x_{k-1}, x_k)$ vardır. Böylece

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2+(f'(c_k)\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+(f'(c_k))^2}\,\Delta x_k$$

için bu toplamın limiti aranan uzunluğu verir.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} L_k = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

* $f'(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli ise $y=f(x)$ in $[a,b]$ aralığındaki uzunluğu

$$\boxed{S = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

* Eğer $g'(y)$ fonksiyonu $[c,d]$ de sürekli ise $x=g(y)$ nin $[c,d]$ aralığındaki uzunluğu:

$$\boxed{S = \int_c^d \sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy}$$

⊛ $f(x)=\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}$, $1\le x\le 4$

eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

$f'(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}$

$(f'(x))^2=\frac{x^4}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}$

$1+(f'(x))^2=\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)^2$

$\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)^2}=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}$

$S=\int_1^4\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{x^3}{12}-\frac{1}{x}\Big|_1^4=\underline{\underline{6}}$

⊛ $y=\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$ eğrisinin $x=0$ dan $x=2$'ye uzunluğu?

$y'=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$ türevi $x=0$ da tanımlı değildir.

Bu nedenle fonksiyonu $y^{3/2}=\frac{x}{2}\Rightarrow x=2y^{3/2}$ şeklinde yeniden düzenleriz.

$x=2y^{3/2}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=3y^{1/2}\rightarrow\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=9y\rightarrow 1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=1+9y$

$S=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=\int_0^1\sqrt{1+9y}\,dy=\int_1^{10}u^{1/2}\frac{du}{9}=\frac{2}{27}u^{3/2}\Big|_1^{10}$

$=\underline{\underline{\frac{2}{27}(10\sqrt{10}-1)}}$

$\begin{pmatrix}x=0\rightarrow y=0\\ x=2\rightarrow y=1\end{pmatrix}$

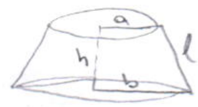
$u=1+9y$
$du=9dy$
$y=0\rightarrow u=1$
$y=1\rightarrow u=10$

Dönel Yüzeylerin Alanları

★ Eğer $f(x) \geq 0$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli türevlenebilen bir fonk. ise $y=f(x)$'in grafiğinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \int_a^b 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$



$Y.A = \pi(a+b)\sqrt{h^2+(b-a)^2}$
$= \pi(a+b)\, l$

★ $x=g(y) \geq 0$ $[c,d]$ aralığında y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzey alanı:

$$S = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1+(g'(y))^2}\, dy$$

(*) $x = 1-y$, $0 \leq y \leq 1$ doğru parçasını y-ekseni etrafında çevirdiğimizde oluşan koninin yanal yüzey alanı?

$$S = 2\pi \int_0^1 (1-y)\sqrt{1+(-1)^2}\, dy = 2\sqrt{2}\pi \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \sqrt{2}\pi$$

(*) $y = \sqrt{x+1}$ $1 \leq x \leq 5$ x-ekseni $\rightarrow S = 2\pi \int_1^5 \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{1+((\sqrt{x+1})')^2}\, dx$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ $(y')^2 = \dfrac{1}{4(x+1)}$ $1+(y')^2 = \dfrac{4x+5}{4(x+1)}$ $\sqrt{1+(y')^2} = \dfrac{\sqrt{4x+5}}{2\sqrt{x+1}}$

$$S = 2\pi \int_1^5 \sqrt{x+1} \cdot \frac{\sqrt{4x+5}}{2\sqrt{x+1}}\, dx = 2\pi \int_1^5 \sqrt{4x+5}\, dx = 2\pi \int_9^{25} \frac{\sqrt{u}}{4}\, du = 2\pi \frac{u^{3/2}}{4 \cdot \frac{3}{2}} \Big|_9^{25}$$

$4x+5 = u$ $4dx = du$
$x=1 \rightarrow u=9$
$x=5 \rightarrow u=25$

$$= \frac{49}{3}\pi$$

Yay Uzunluğu için Diferansiyel Formül

$y=f(x)$ ve $y'=f'(x)$ $[a,b]$ de sürekli ise $P(a,f(a))$ başlangıç noktasından $Q(x,f(x))$ noktasına $y=f(x)$ in uzunluğu:

$$S(x)=\int_a^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$$ formülü ile bulunur.

$S(x)$'e yay uzunluğu fonksiyonu denir.

(*) $f(x)=\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}$ eğrisi için; başlangıç noktasını $A(1,\frac{13}{12})$ alarak yay uzunluğu fonksiyonunu bulunuz.

Bu fonk. yardımı ile $A(1,\frac{13}{12})$ $B(4,\frac{67}{12})$ arası uz. bulunuz.

$f'(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}$ $\quad (f'(x))^2=\frac{x^4}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}$ $\quad 1+(f'(x))^2=\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}$

$$=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$\sqrt{1+(f')^2}=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}$$

$$s(x)=\int_1^x\left(\frac{t^2}{4}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{t^3}{12}-\frac{1}{t}\Bigg|_1^x=\frac{x^3}{12}-\frac{1}{x}-\frac{1}{12}+1=\frac{x^3}{12}-\frac{1}{x}+\frac{11}{12}$$

$$s(4)=\frac{4^3}{12}-\frac{1}{4}+\frac{11}{12}=\underline{\underline{6}}$$

Burası Müfredat Dışı :))

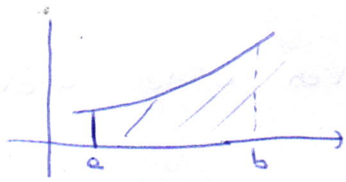
iyi çalışmalar...

Genelleştirilmiş İntegraller

1. Tip improper İntegraller

① Eğer $f(x)$, $[a,\infty)$ da sürekli ise:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$$



② Eğer $f(x)$, $(-\infty,a]$ da sürekli ise:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^a f(x)dx$$

③ Eğer $f(x)$, $(-\infty,\infty)$ aralığında sürekli ise, c herhangi bir reel sayı olmak üzere:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^c f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_c^R f(x)dx$$

Her bir durumda, limit sonucu sonlu ise improper integral yakınsaktır ve limit değeri integralin değeridir. Eğer limit yoksa veya $\mp\infty$ ise integral ıraksaktır.

2. Tip improper İntegraller

① Eğer $f(x)$, $(a,b]$ de sürekli, a da süreksiz ise:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$$

② $f(x)$, $[a,b)$ de sürekli, b de süreksiz ise;

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

③ $f(x)$, $a<c<b$ iken c'de süreksiz, $[a,c)\cup(c,b]$ de sürekli ise;

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Her bir durumda limit sonlu ise int. yakınsaktır ve değeri bu limit değeridir. Limit yoksa veya sonuç $\mp\infty$ ise int. ıraksaktır.

⊛ $y=\frac{\ln x}{x^2}$ eğrisi altında $x=1$ den $x=+\infty$'a kadar olan alanı hesaplayınız.

$$I=\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\ln x}{x^2}dx \qquad \ln x = u \quad \frac{dx}{x}=du \qquad \frac{dx}{x^2}=dv \quad v=-\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^R + \int_1^R \frac{dx}{x^2}\right] = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{\ln R}{R} - \frac{1}{x}\Big|_1^R\right] = \lim_{R\to\infty}\left[\underbrace{-\frac{\ln R}{R}}_{\lim_{R\to\infty}\frac{1/R}{1}=0} - \underbrace{\frac{1}{R}}_{0} + 1\right] = \underline{1}$$

⊛ $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to-\infty}\int_R^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\lim_{R\to-\infty} \text{Arctan}x\Big|_R^0 + \lim_{R\to\infty}\text{Arctan}x\Big|_0^R$$

$$=\underbrace{\lim_{R\to-\infty}(-\text{Arctan}R)}_{-\left(-\frac{\pi}{2}\right)} + \underbrace{\lim_{R\to\infty}\text{Arctan}R}_{\pi/2}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\underline{\pi}$$

⊛ $$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{c\to1^-} \int_0^c \frac{dx}{1-x} = \lim_{c\to1^-} \left[-\ln|1-x| \Big|_0^c \right]$$

$$= \lim_{c\to1^-} \left[-\ln|1-c|\right] = +\infty \rightarrow \text{integral ıraksaktır}$$

⊛ $$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to1^-} \int_0^c \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{c\to1^+} \int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$\int_0^1 + \int_1^3$$

$$= \lim_{c\to1^-} \left[3.(x-1)^{1/3} \Big|_0^c \right] + \lim_{c\to1^+} \left[3(x-1)^{1/3} \Big|_c^3 \right]$$

$$= \lim_{c\to1^-} \left(\underbrace{3(c-1)^{1/3}}_{0} + 3\right) + \lim_{c\to1^+} \left(3.2^{1/3} - \underbrace{3.(c-1)^{1/3}}_{0}\right)$$

$$= 3 + 3\sqrt[3]{2}$$