T12

Fonksiyonların Ekstremum Değerleri:

Mutlak Ekstremum Değerler (Mutlak Max./Mutlak Min. Değerleri):

f'in tanım kümesi D olsun. Eğer her $x \in D$ için;

a) $f(x) \leq f(c)$ olacak şekilde bir $c \in D$ varsa f fonksiyonu c noktasında f(c) mutlak maksimum değerine sahiptir denir.

b) $f(x) \geq f(c)$ olacak şekilde bir $c \in D$ varsa f fonksiyonu c noktasında f(c) mutlak minimum değerine sahiptir.

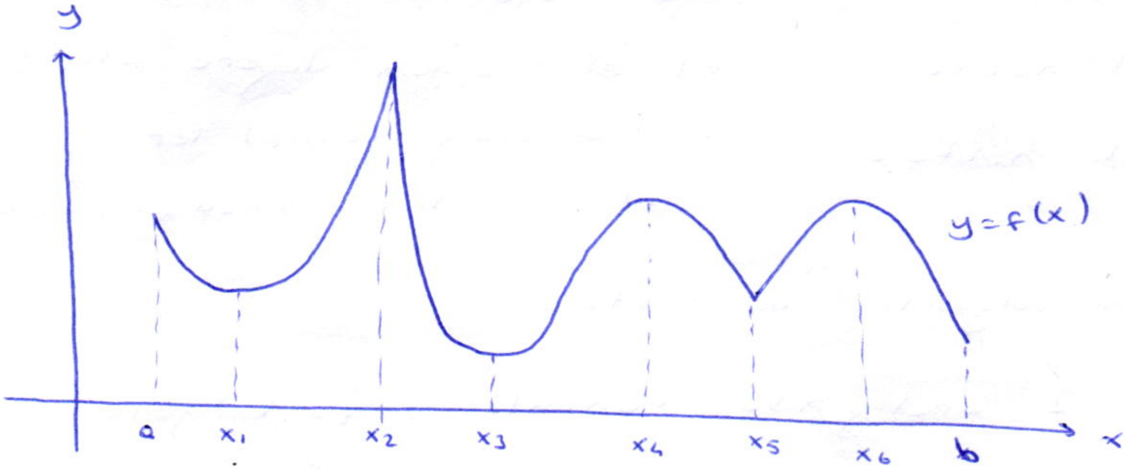
NOT:

① Bir fonksiyonun birden fazla mutlak max./min. noktası olabilir. $f(x) = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ noktalarında mutlak max. değeri 1'e ulaşır.

② Her fonksiyonun mutlak max/min değere sahip olması gerekmez. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun sonlu bir mutlak max. değeri yoktur.

* Bir fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerine ekstremum değerleri denir.

Varlık Teoremi: Eğer f in tanım bölgesi, sonlu kapalı bir aralık veya bu şekildeki aralıkların sonlu bir birleşiminden oluşursa ve f bu bölgede sürekli ise o zaman, f fonksiyonu bir mutlak minimum değere ve bir mutlak maksimum değere sahiptir.



Yukarıdaki şekle göre f'in mutlak max değeri $f(x_2)$ ve mutlak min. değeri $f(x_3)$ dür. Bu değerlere ek olarak f in başka yerel max. ve yerel min. değerleri vardır. f fonksiyonu a, x_2, x_4, x_6 noktalarında yerel max değerlere ve x_1, x_3, x_5, b noktalarında yerel min. değerlere sahiptir.

Yerel Ekstremum Değerler

Bir f fonksiyonunun D tanım bölgesinin bir iç noktasında; eğer c'yi içeren bir açık aralıktaki her x için:

* $f(x) \geq f(c)$ ise, c'de bir yerel minimumu
* $f(x) \leq f(c)$ ise, c'de bir yerel maksimumu vardır.

Kritik Nokta: Bir f fonksiyonunun tanım kümesindeki bir iç nokta, f' türevini sıfır veya tanımsız yapıyorsa f fonksiyonunun kritik noktasıdır.

Yani;

$f'(c)=0$ veya $f'(c)$ tanımsız ise c kritik noktadır.

* Bir $f(x)$ fonksiyonu sadece aşağıda verilen 2 çeşit özel noktada yerel ekstremum değere sahip olabilir:

① f in kritik noktaları → $f'(x)=0$ olan $x \in D(f)$ ler
→ $f'(x)$ in tanımlı olmadığı $x \in D(f)$ ler

② f in tanım bölgesinin uç noktaları

Teorem: Bir I aralığında tanımlı f fonksiyonu bir $x_0 \in I$ noktasında yerel max. (veya yerel min.) değere sahipse; o zaman x_0 noktası ya f in bir kritik noktasıdır ya da I nın bir uç noktasıdır.

Mutlak Ekstremum Değerlerin Bulunması (Sonlu Kapalı Aralıkta):

① Fonksiyonun kritik noktaları ve uç noktaları belirlenir.

② Bu noktalarda fonksiyonun aldığı değerler hesaplanır.

③ Bu değerlerin en büyüğü mutlak max. en küçüğü mutlak min. değerdir.

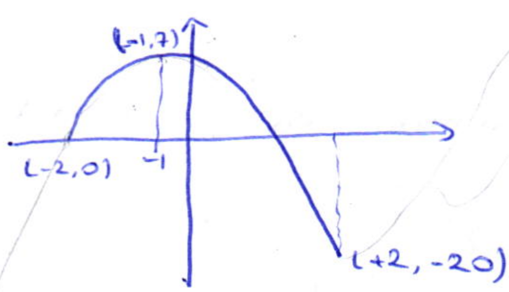
(*) $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ $-2 \le x \le 2$ deki mutlak ekstremum değerlerini bulunuz.

$\boxed{x=2}$ $\boxed{x=-2}$ → Uç noktalar.

$f'(x)=3x^2-6x-9=0 \Rightarrow \cancel{x=3}$ $\boxed{x=-1}$

$x=2 \rightarrow f(2)=-20$
$x=-2 \rightarrow f(-2)=0$
$x=-1 \rightarrow f(-1)=7$

$(-1,7)$ noktası mutlak max. noktası
$(2,-20)$ " " min "



⊛ $y = 3x^{2/3} - 2x$ fonksiyonunun $[-1,1]$ deki mutlak max. ve mutlak min. noktaları?

$\boxed{x=-1}$ $\boxed{x=1}$ uç noktalar

$y' = 2x^{-1/3} - 2 = 2\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)$ $\boxed{x=0}$ y' yü tanımsız yapar. K. Nokta

$y' = 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$ K.N.

$$\left.\begin{array}{l} x=-1 \to f(-1)=5 \\ x=0 \to f(0)=0 \\ x=1 \to f(1)=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (-1,+5) \text{ mutlak max. nokta} \\ (0,0) \text{ mutlak min. nokta} \end{array}$$

⊛ $f(x) = 8x - x^4$ $[-2,1]$ deki mutlak max ve mutlak min. nokta?

$\boxed{x=-2}$ $\boxed{x=1}$ uç noktalar

$f'(x) = 8 - 4x^3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \notin [-2,1]$ $(\sqrt[3]{2} > 1)$

$$\left.\begin{array}{l} x=-2 \to f(-2)=-32 \\ x=1 \to f(1)=7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (-2,-32) \text{ mutlak min.} \\ (1,7) \text{ mutlak max.} \end{array}$$

Artan / Azalan fonksiyonlar:

$f(x)$ in $[a,b]$ de sürekli, (a,b) de türevlenebilir olduğunu kabul edelim.

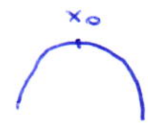
* Her $x \in (a,b)$ için $f'(x) > 0$ ise; f $[a,b]$ de artandır.
* " " " $f'(x) < 0$ " ; " " " azalandır.

Yerel Ekstremum Değerler İçin Birinci Türev Testi

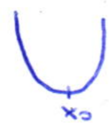
I. Kısım (Kritik Noktaların Test Edilmesi):

f fonksiyonu tanım kümesinin bir uç noktası olmayan x_0 da sürekli olsun.

1) Eğer x_0 noktasını içeren ve (a, x_0) da $f'(x)>0$ ve (x_0, b) de $f'(x)<0$ olacak şekilde bir açık (a,b) aralığı varsa, f x_0 da yerel max. değere sahiptir.

((f', artıdan eksiye değişiyor, artarken azalıyor) )

2) Eğer x_0 noktasını içeren ve (a, x_0) da $f'(x)<0$ ve (x_0, b) de $f'(x)>0$ olacak şekilde bir açık (a,b) aralığı varsa, f x_0 da yerel min. değere sahiptir.

(f', − den + ya değişiyor, azalırken artıyor. )

3) f'; x_0 da işaret değiştirmezse max. veya min. nokta değildir.

II. Kısım (Uç Noktaların Test Edilmesi):

1) f, tanım bölgesinin bir sol uç noktası a'da sağdan sürekli olsun.

a) Eğer (a,b) de $f'(x)>0$ ise f a'da yerel min değere sahiptir.

b) Eğer (a,b) de $f'(x)<0$ ise f a'da yerel max. değere sahiptir.

2) f, tanım bölgesinin bir b ~~a~~ sağ uç noktasında soldan sürekli olsun.

a) (a,b) de $f'(x)>0$ ise f b'de yerel max değere sahiptir.

b) " " $f'(x)<0$ ise " " yerel min " "

(*) $f(x)=x^{1/3}(x-4)$ fonksiyonunun artan/azalan olduğu aralıkları, yerel ekstremumlarını ve varsa mutlak ekstremumlarını bulunuz.

$f(x)=x^{4/3}-4x^{1/3}$ → tanım kümesi: $(-\infty,\infty)$ → uç nokta yok!

$f'(x)=\frac{4}{3}x^{1/3}-\frac{4}{3}x^{-2/3}=\frac{4}{3}\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$

$\boxed{x=0}$ → K.N (f'yü tanımsız yapar) (ÇKK)

$f'(x)=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$ K.N.

x	$-\infty$		0		1		∞
f'		−	0	−	0	+	
f		↘		↘		↗	
			eks. değil		yerel min.		

$x=1 \to f(1)=-3$

$(1,-3)$ noktası aynı zamanda mutlak min.

(*) $f(x)=x-1+\frac{1}{x+1}$ in artan/azalan olduğu aralıkları ve ekstremumlarını bulunuz.

T.K: $\mathbb{R}-\{-1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$ → uç nokta yok

$f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ $\quad x=-1$ → f'yü tanımsız yapar ancak K.N. değil

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}\ \boxed{x=-2}$ K.N.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'		+	0	−	$\not\exists$	−	0	+	
f		↗		↘		↘		↗	
			y.max				y.min		

Artan: $(-\infty,-2]\cup[0,\infty)$

Azalan: $[-2,-1)\cup(-1,0]$

Y.Max: $x=-2$

Y.Min: $x=0$

(*) $f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 25x^3 - 15x^2 + 1$ Artan / Azalan aralıklar? Max / Min?

$f'(x) = 15x^4 - 60x^3 + 75x^2 - 30x = 15x(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$ $\boxed{x=0}$ $\boxed{x=1}$

1	1	-4	5	-2
		1	-3	2
	1	-3	2	0

$x^2 - 3x + 2 = 0$ $\boxed{x=2}$ $\boxed{x=1}$

x = 1 Ç.K. Kök.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'	+	0 −	0 −	0 +	
f	↗	↘	↘	↗	

$x = 0 \to$ Yerel max

$x = 2 \to$ Yerel min

Artan: $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

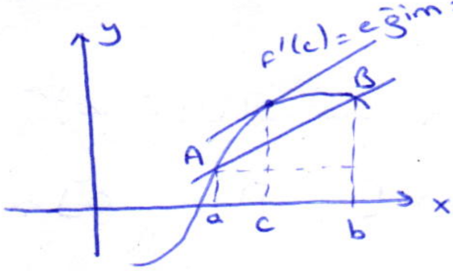
Azalan: $[0, 2]$

Ortalama Değer Teoremi:

$f(x)$, $[a,b]$ de sürekli, (a,b) de türevlenebilir ise

$f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.

Geometrik olarak O.D.T., a ve b arasında bir yerde eğrinin AB kirişine paralel en az bir teğetinin olduğunu söyler.



(*) $f: [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+1}$ fonksiyonuna O.D.T. gerçekleyiniz.

$f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x+1) - (x^2 - x)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} \Rightarrow f$, $(0,3)$ de türevli

$f(x)$, $[0,3]$ de sürekli. O halde $f'(c) = \dfrac{c^2+2c-1}{(c+1)^2} = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = \dfrac{1}{2}$

$c^2 + 2c - 3 = 0 \Rightarrow c_1 = \cancel{-3}$ $\boxed{c_2 = 1}$ $c_2 = 1 \in (0,3)$ ✓

(*) $f(x)=\begin{cases} x^3+x & , x\le 1 \\ 4x-2 & , x>1 \end{cases}$ fonksiyonuna $[-2,2]$ de O.O.T. gerçekleyiniz.

① $f(x)$, $[-2,2]$ de sürekli mi?

Fonksiyon $[-2,1)$ de $f(x)=x^3+x$ dir ve süreklidir.

Fonksiyon $(1,2]$ de $f(x)=4x-2$ " " " .

$x=1$ de: $\lim\limits_{x\to 1^+} 4x-2 = \lim\limits_{x\to 1^-} x^3+x = 2 = f(1)$ olduğundan

süreklidir. Sonuç olarak $f(x)$ $[-2,2]$ de süreklidir.

② $f(x)$, $(-2,2)$ de türevlenebilir mi?

Fonksiyon $[-2,1)$ de $f(x)=x^3+x$ dir, türevlenebilirdir.

" $(1,2]$ " $f(x)=4x-2$ dir, " .

$x=1$ için:

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4(1+h)-2-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4h}{h}=4$$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^3+(1+h)-2}{h}=\lim_{h\to 0^-}(h^2+3h+4)=4$$

$f'_-(1)=f'_+(1)=f'(1)=4$ türevli. Sonuçta f, $[-2,2]$ de türevli.

O.O.T. uygulanabilir.

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+1 & , x\le 1 \\ 4 & , x>1 \end{cases}$ $\qquad f'(c)=\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=4$

$3c^2+1=4 \Rightarrow c=\mp 1$

$\underline{c=-1}$ ve $\underline{1\le c<2}$ olmalıdır.

(*) $0<a<b$ için $\sqrt{a} < \frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) < \sqrt{b}$ eşitsizliğinin sağlandığını O.D.T. kullanarak gösteriniz.

$f(x)=\sqrt{x}$, $[a,b]$ alalım.

(1) $f(x)$ $[a,b]$ de sürekli mi?

$f(x)=\sqrt{x}$ $x \geq 0$ için süreklidir. $a,b>0$ olduğundan $f(x)$ $[a,b]$ de süreklidir.

(2) $f(x)$ (a,b) de türevli mi?

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $x>0$ için $f'(x)$ tanımlı. $a,b>0$ olduğundan

$f(x)$ (a,b) de türevli.

O.D.T uygulanabilir.

$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ => olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ vardır.

$$\frac{1}{2\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}$$

★ $c>a \Rightarrow \sqrt{c}>\sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}}<\frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}}>\frac{\cancel{\sqrt{b}-\sqrt{a}}}{\underbrace{b-a}_{(\cancel{\sqrt{b}-\sqrt{a}})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}}$

$\frac{1}{2\sqrt{a}}>\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{b}+\sqrt{a}>2\sqrt{a} \Rightarrow \underline{\sqrt{a}<\frac{1}{2}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}$ (1)

★ $c<b \Rightarrow \sqrt{c}<\sqrt{b} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}}>\frac{1}{2\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{b}}<\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$

$$\downarrow$$

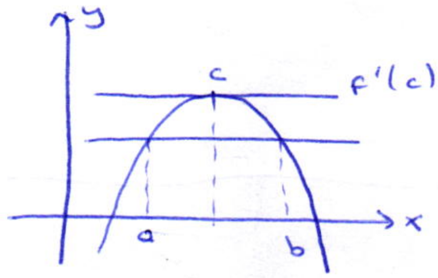
$$\boxed{\sqrt{b}>\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}}$$ (2)

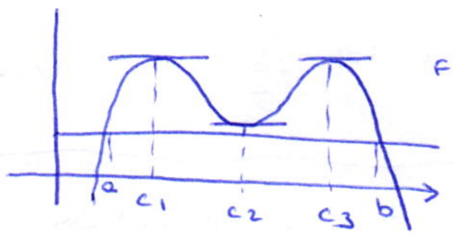
(1) ve (2) den

$\sqrt{a}<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}<\sqrt{b}$ dır.

<u>Rolle Teoremi:</u> f $[a,b]$ de sürekli, (a,b) de türevlenebilir ve $f(b)=f(a)$ olsun. Bu durumda, en az bir $c\in(a,b)$ için $f'(c)=0$ dır.

Geometrik olarak, Rolle Teoremi, bir eğrinin yatay bir doğruyu kestiği herhangi iki nokta arasında en az bir yatay teğete sahip olduğunu belirtir.





---

* $f(x)=x^2-2x+3$ fonksiyonuna $[0,2]$ de Rolle Teo. uygulayın.

$f(x)$, $[0,2]$ de sürekli, $(0,2)$ de türevli ve $f(0)=f(2)=3$ dür. Rolle Teoremi uygulanabilir.

$f'(c)=2c-2=0 \Rightarrow c=1\in(0,2)$ ✓

---

* $f(x)=x^{2/3}-1$ fonksiyonuna $[-1,1]$ de Rolle Teo. uygulayın

f, $[-1,1]$ de sürekli ✓

$f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow x=0$ için tanımsız. $f(x)$ $(-1,1)$ de türevlenemez.

Sonuç olarak $f(x)$'e $[-1,1]$ de Rolle Teo. uygulanamaz.

<u>Teorem:</u> Bir fonksiyonun türevi, bir aralığın her noktasında sıfır ise, fonksiyon o aralıkta sabittir.

⊛ $f(x)=\cos^2x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos x.\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$ fonksiyonunun sabit olduğunu gösterip bu sabiti bulunuz.

$$f'(x)=-2\cos x\sin x+2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\sin x.\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$
$$+\cos x.\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

$$=-\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=0$$

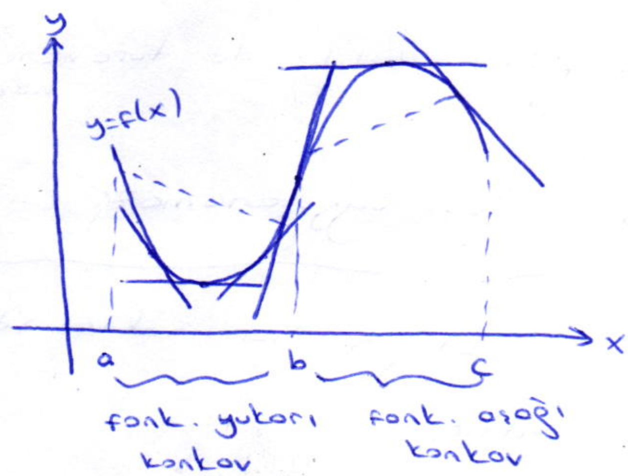
$f(x)$ sabittir.

$x=0$ için $f(0)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Konkavlık ve Büküm Noktaları

Eğer bir f fonksiyonu açık bir I aralığında türevlenebilir ve f' türevi I üzerinde artan bir fonk. ise (yani $f''>0$ ise) f fonksiyonu I üzerinde yukarı konkavdır denir. Aynı şekilde f' türevi I üzerinde azalan ise ($f''<0$) f fonksiyonu I üzerinde aşağı konkavdır denir.

Konkavlık için Bazı Geometrik Gözlemler:



1) Eğer bir açık aralıkta f yukarı konkav ise, bu aralıkta, f in grafiği teğetlerin üstünde kalır, eğri üzerindeki iki noktayı birleştiren doğru parçası ise grafiğin üstünde kalır.

2) Eğer bir açık aralıkta f aşağı konkav ise, bu aralıkta, f in grafiği teğetlerin altında, iki noktayı birleştiren doğru parçası ise grafiğin altında kalır.

3) f fonksiyonu bir noktada teğete sahip ve f in bu noktanın her iki tarafındaki konkavlıkları zıt ise böyle bir noktaya büküm noktası denir.

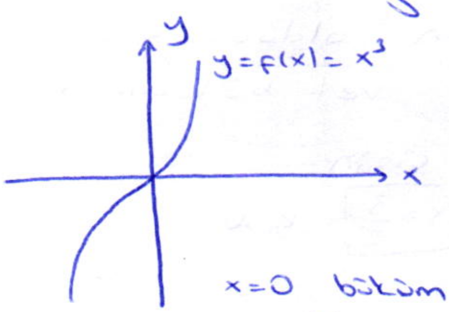
Büküm Noktası: Bir $y=f(x)$ fonksiyonu ve bir $x=x_0 \in D(f)$ noktası verilsin.

a) $y=f(x)$ in grafiği x_0 da teğete sahip (ya $f'(x_0)$ mevcut ya da x_0 da dikey teğete sahip)

b) f in x_0 ın her iki yanındaki konkavlığı zıt

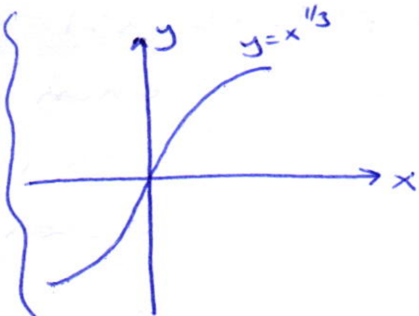
ise $y=f(x)$ eğrisi x_0 da büküm noktasına sahiptir.

⊛ $(c, f(c))$ büküm noktasında ya $f''(c)=0$ dır ya da $f''(c)$ mevcut değildir.



$x=0$ büküm noktası

$y=f(x)$ in $x=a$ nın iki yanında konkavlığı zıttır. Ancak $x=a$ da teğeti mevcut değildir. $x=a$ Büküm nok. değil



$x=0$ büküm noktası

Konkavlık ve İkinci Türev:

1) I üzerinde $f''(x)>0$ ise ; f I üzerinde yukarı konkavdır. $\cup$

2) " " $f''(x)<0$ " ; f I üzerinde aşağı konkavdır. $\cap$

3) Eğer x_0 f in büküm noktası ve $f''(x_0)$ mevcut ise o zaman, f x_0'ı içeren bir açık aralıkta türevlenebilirdir. f x_0'ın bir tarafında artan, bir tarafında azalan olduğundan o zaman f' x_0 da bir yerel min veya yerel max, sahip olmalıdır. Bu ise $f''(x_0)=0$ olduğunu gösterir.

(*) $f(x) = x^6 - 10x^4$ konkavlik aralıklarını ve büküm noktalarını bulunuz.

$f'(x) = 6x^5 - 40x^3$ $\quad$ $f''(x) = 30x^4 - 120x^2 = 0 \Rightarrow 30x^2(x^2-4) = 0$

$\boxed{x=0}$ G.K.K. $\quad \boxed{x=2} \quad \boxed{x=-2}$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f''		+	0	−	0	−	0	+	
f		∪	B.N.	∩		∩	B.N.	∪	

Yukarı Konkav: $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

Aşağı Konkav: $[-2, 2]$

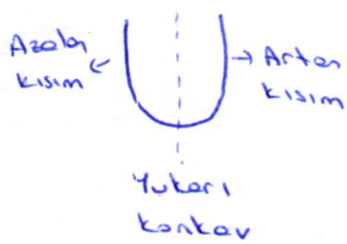
Büküm Noktası: $x = 2 \quad x = -2$

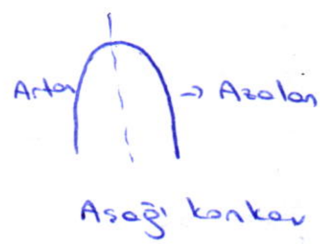
(*) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ in artan ve azalan olduğu aralıkları, yerel ekstremum noktalarını, konkavlığını ve büküm noktalarını belirleyip eğriyi kaba taslak çizin.

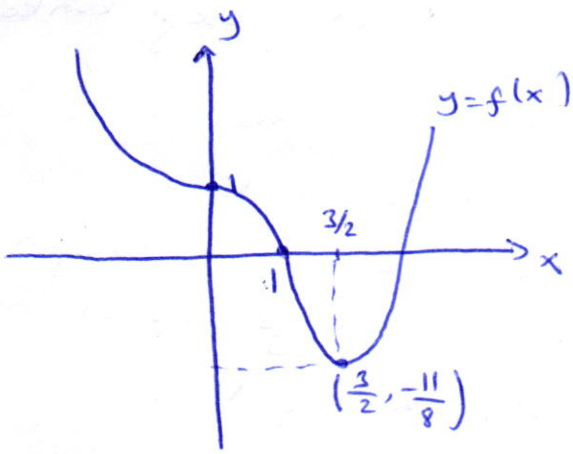
$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$ G.K.K. $\quad \boxed{x=\frac{3}{2}}$ K.N.

$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1) = 0 \quad \boxed{x=0} \quad \boxed{x=1}$

x	$-\infty$		0		1		$3/2$		$+\infty$
f'		−	0	−		−	0	+	
f''		+	0	−	0	+		+	
f		↘	B.N	↘	B.N.	↘	min	↗	







$x=0 \rightarrow f(0) = 1$

$x=1 \rightarrow f(1) = 0$

$x=\frac{3}{2} \rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{8}$

Yerel Ekstremumlar için 2. Türev Testi:

① Eğer $f'(x_0)=0$ ve $f''(x_0)<0$ ise o zaman f, x_0'da yerel maksimuma sahiptir.

② Eğer $f'(x_0)=0$ ve $f''(x_0)>0$ ise o zaman f, x_0'da yerel minimuma sahiptir.

③ Eğer $f'(x_0)=0$ ve $f''(x_0)=0$ ise herhangi bir çıkarımda bulunamayız. f, x_0'da bir yerel max., yerel min. veya büküm noktasına sahip olabilir.

Asimptotlar: Sonsuza giden bir eğrinin çeşitli noktalarının gittikçe yaklaştığı bir eğri veya doğrudur.

① **Dikey Asimptot:** Eğer $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\mp\infty$ veya $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\mp\infty$ veya her iki durum da mevcut ise $y=f(x)$ in grafiği $x=a$ da ~~yatay~~ asimptota sahiptir. * Eğri dikey asimptotunu kesemez.

Bu daha çok f(x) in iki ifadenin bölümü şeklinde olması ve $x=a$ da paydanın sıfır olması durumunda gerçekleşir.

② **Yatay Asimptot:** Eğer, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ veya $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ veya her ikisi de mevcut ise $y=L$ f(x) fonksiyonunun bir yatay asimptotudur.

Eğik Asimptot:

③ Bir rasyonel fonksiyonda payın derecesi paydanın derecesinden 1 büyük ise fonksiyon eğik asimptota ($y=mx+n$ şeklinde bir doğru) sahiptir. Pay paydaya bölünüp asimptot bulunur.

II. Yol

$y=f(x)$ $y=\alpha x+\beta \to$ eğik asimptot

$\alpha=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$ $\beta=\lim\limits_{x\to\infty}(y-\alpha x)$

(*) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.

$x^2-x=0$ $\boxed{x=1}$ $\boxed{x=0}$ dikey asimptotlar

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2-x}=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$ yatay asimptot.

Eğik asimptotu yok!

(*) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ fonksiyonunun asimptotları?

$\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$

$y=1$

$\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}=y=1$

$x=0$

$\boxed{x=0}$ dikey asimptot.

Yatay asimptotu yok.

$f(x)=\boxed{x}+\dfrac{1}{x} \Rightarrow \boxed{y=x}$ eğik asimptot

---

Bir Rasyonel Fonksiyonun Asimptotları

$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ olsun. $P(x)$ m. dereceden, $Q(x)$ n. dereceden iki polinom olsun. O zaman,

a) $Q(x)=0$ olan her x noktasında fonksiyonun dikey asimptotu vardır.

b) $m<n$ ise fonksiyonun $y=0$ yatay asimptotu vardır.

c) $m=n$ ise fonksiyonun $y=L$ yatay asimptotu vardır. Burada L, $P(x)$ ve $Q(x)$ in en büyük dereceli terimlerinin katsayıları oranıdır.

d) $m=n+1$ ise fonksiyon bir eğik asimptota sahiptir.

$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=ax+b+\dfrac{R(x)}{Q(x)} \Rightarrow y=ax+b$ eğik asimptot

e) $m>n+1$ ise eğik veya yatay asimptot yoktur.

⊛ $y=\dfrac{x^3}{x^2+x}$ in asimptotları?

$x^2+x=0 \Rightarrow x=0 \quad x=-1$ dikey asimptot

Yatay Asimptot yok.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+x \\ \cline{2-2} -\;x^3+x^2 & \boxed{x-1} \\ \hline -x^2 & \\ -\;-x^2-x & \\ \hline +x & \end{array} \rightarrow y=x-1 \text{ eğik asimptot}$$

Basit Eğri Çizimleri:

Bir fonksiyonun $y=f(x)$ grafiğini çizerken kullanabileceğimiz bilgiyi elde etmek için 3 kaynağımız vardır:

① Fonksiyonun Kendisi: Fonksiyonu kullanarak grafik üzerinde bulunan bazı noktaların koordinatlarını, grafiğin simetrikliğini, bazı asimptotları belirleriz.

② Fonksiyonun Birinci Türevi: f' yü kullanarak fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları, bazı yerel ekstremum değerlerini belirleriz.

③ Fonksiyonun İkinci Türevi: f'' yü kullanarak fonksiyonun konkavlığını, büküm noktalarını belirleriz.

Eğri Çizimi İçin Kontrol Listesi

① Aşağıdakiler için $f(x)$ i incele:

a) Asimptotlar (Yatay, Dikey, Eğik); Tanım Kümesi

b) Simetri (fonk. tek veya çift fonksiyon mu?)

c) Eksenleri kesim noktaları

② Aşağıdakiler için $f'(x)$ i incele:

a) Kritik noktalar ($f'(x)=0$ veya $f'(x)$ in tanımsız olduğu noktalar)

b) $f'(x)$ in pozitif ve negatif olduğu aralıklar, Ekstremumlar

③ Aşağıdakiler için $f''(x)$ i incele:

a) $f''(x)=0$ veya f'' i tanımsız yapan noktalar

b) f'' nün pozitif veya negatif olduğu aralıklar

c) Büküm noktaları

④ Tüm noktaları tablo üzerinde inceleyip eğriyi çiz

⊛ $y=\dfrac{x^2-2}{1-x^2}$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Tanım Kümesi: $\mathbb{R}-\{-1,1\} \Rightarrow \boxed{x=1}\ \boxed{x=-1}$ D.A.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2}{1-x^2}=-1 \Rightarrow \boxed{y=-1}$ Y.A. Eğik Asimptot yok.

$x\to -x \Rightarrow f(-x)=\dfrac{x^2-2}{1-x^2}=f(x) \to$ Çift Fonk. $\Rightarrow$ y-eksenine göre simetrik

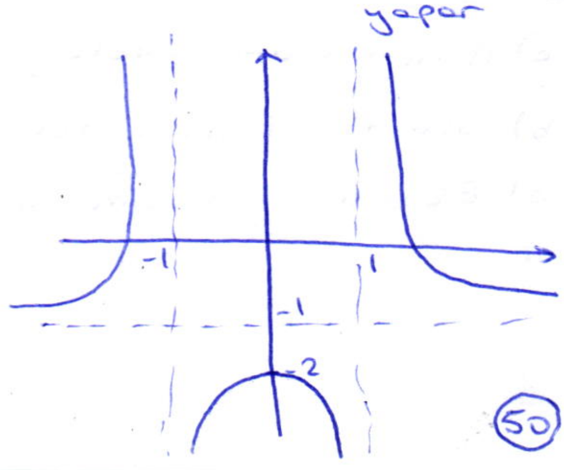
$y'=\dfrac{2x(1-x^2)-(-2x)(x^2-2)}{(1-x^2)^2}=-\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}=0\to \boxed{x=0}$ K.N

$\underline{x=\mp 1}$ f' yü tanımsız yapar
(Ç.K.K)

$y''=-\dfrac{2(1-x^2)^2-2x\cdot 2\cdot(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}=-\dfrac{-2x^2+2+8x^2}{(1-x^2)^3}=-\dfrac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$

$x=\mp 1$ f'' yü tanımsız yapar

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		+	T.sız	+	0	−	T.sız	−	
f''		+	T.sız	−		−	T.sız	+	
f	-1	↗ $+\infty$	T.sız	$-\infty$ ↗	y max -2	↘ $-\infty$	T.sız	$+\infty$ ↘	-1



⊛ $y = \dfrac{x^2+2x+4}{2x}$ eğrisini çiziniz.

Tanım Bölgesi: $\mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \boxed{x=0}$ D.A.

Yatay Asimptot Yok.

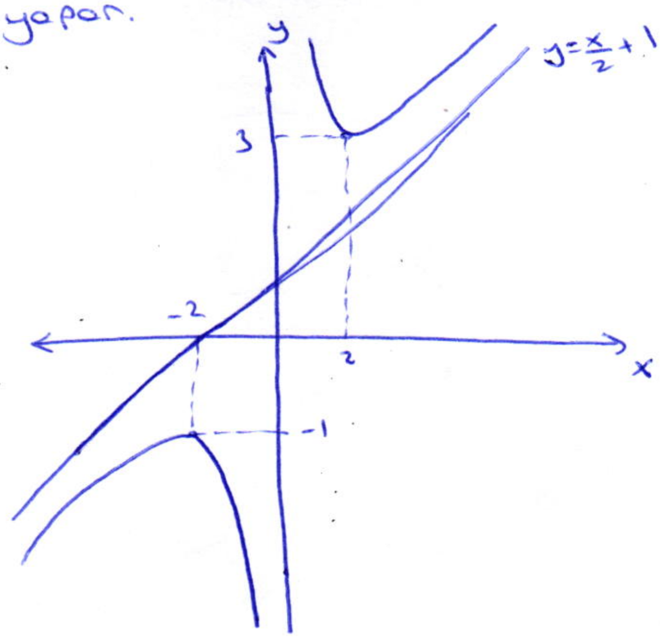
$y = \dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{2}{x} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{x}{2} + 1}$ E.A.

$y' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{2x^2} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \mp 2}$ K.Nokta

$x=0$ y'' yü tanımsız yapar (G.K.K)

$y'' = \dfrac{4}{x^3}$ $x=0$ y'' yü tanımsız yapar.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'		+	0	−	T.sız	−	0	+	
f''		−		−	T.sız	+		+	
f	$-\infty$	↗	max $y=-1$	↘	T.sız $-\infty \mid +\infty$	↘	min $y=3$	↗	$+\infty$

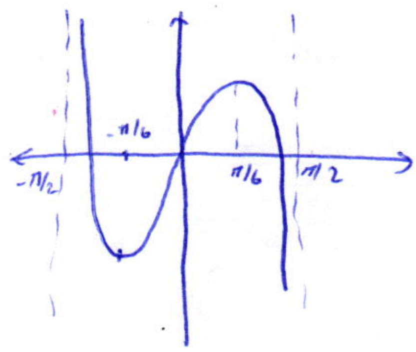


⊛ $y = \dfrac{4}{3}x - \tan x$ eğrisini çiziniz. $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right.$ aralığında çizin$\left.\right)$

$y' = \dfrac{4}{3} - \sec^2 x = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \dfrac{3}{4} = \cos^2 x \Rightarrow \cos x = \mp \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{x = \dfrac{\pi}{6} \quad x = -\dfrac{\pi}{6}}$ K.N.

$y'' = -2 \sec x . \sec x \tan x = -2\sec^2 x \tan x = -2 \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

x	$-\pi/2$		$-\pi/6$		0		$\pi/6$		$\pi/2$
f'		−	0	+		+	0	−	
f''		+		+	0	−		−	
f		↘	min	↗	B.N.	↗	max	↘	



$x=0 \to y=0$

$x = \dfrac{-\pi}{6} \to y = -\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
$\quad 0{,}7 \quad 0{,}57$

$x = \dfrac{\pi}{6} \to y = \dfrac{2\pi}{9} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$